Басин Михаил Абрамович.

Доктор технических наук

Профессор.

Директор НИЦ «Синергетика»
Санкт- Петербургский союз учёных

199034 г. Санкт- Петербург.
Университетская наб. д.5, оф. 300

Телефон (812) 2355724

E-mail: basin@soft-tronik.spb.ru

Введение экспоненциального внешнего времени и комплексных степенных многочленов при исследовании катастрофических процессов.

Басин М. А.
Санкт- Петербургский союз учёных
199034 г. Санкт- Петербург.
Университетская наб. д.5, оф. 300
E-mail: basin@soft-tronik.spb.ru

Работа выполнена при поддержке РГНФ
(грант №07-03-90309а/Б)

Аннотация.

В работе рассмотрен класс математических моделей, описывающих динамику систем, возникших или исчезнувших в определённый момент времени. При их построении использовано представление о внутреннем (линейном) и внешнем (экспоненциальном) времени. Установлена связь между представлениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах внутреннего и внешнего времени. Результаты работы позволяют более адекватно описывать процесс рождения и разрушения сложных систем.

В случае введения экспоненциального времени в систему линейных дифференциальных уравнений решения преобразованной системы являются степенными многочленами от новой переменной. Существенные особенности вносит комплексификация рассматриваемых уравнений.

В качестве примера применения указанной замены переменных приведёно решение обратной задачи отыскания системы дифференциальных уравнений, описывающей катастрофические события, приводящие к разрушению сложных систем.

Abstract

In this paper is considered the class of mathematically models, describing the dynamics of systems, appearing or disappearing at the determined moment of time. At their building is used the conception of the internal (linear) and external (exponential) time. The connection between the presentations of systems of usual differential equations in the terms of internal and external time is established. The results of the work allow describe the process of birth and destroying of complex systems more adequate.

In the case of introduction of exponential time in the system of linear differential equations the decisions of transformed system are the power polynomials of new variable. Essentially peculiarities introduces the complexification of considering equations.

As an example of application of adjusted change of variables the solution of inverse problem about the finding of system of differential equations, describing catastrophic occasions, turning to the destruction of complex systems, is given.

Для описания конечномерных динамических систем во многих случаях используются системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = AX \,, \tag{1}$$

где A - нелинейный оператор, X - n-мерный вектор, описывающий состояние исследуемой динамической системы. Формально не усложняя проблемы, предположим, что компоненты вектора X и оператор A комплексные. При рассмотрении многих задач динамики решение системы дифференциальных уравнений существует в бесконечном диапазоне изменения времени ($t \in R$). Следовательно, большинство реальных систем и структур, имеющих конечный период существования, описывается в рамках дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами не вполне адекватно (без учёта их возникновения и разрушения).

Поставим задачу отыскания такого класса дифференциальных уравнений, которые бы учитывали основное свойство реальных систем – их конечность во времени, и описывали бы их начальное и (или) конечное состояние.

Обратимся к качественному анализу динамики реальной эволюционирующей системы, например, живого организма. При рассмотрении динамики развития такой системы с необходимостью приходится вводить представление о двух связанных между собой понятиях времени: внешнем времени T, которое описывает процессы взаимодействия с полем (окружающей средой), и внутреннем времени t, определяющем, в основном, ритм внутренней динамики системы.

Динамика многих объектов, для которых возможно чётко зафиксировать момент их рождения и исчезновения, рассматриваемая с позиций внешнего времени, является сугубо неоднородной. Так, например, в начальные периоды существования качественные изменения структуры биологических объектов в рамках внешнего времени происходят во многих случаях очень быстро. Животное или растение в течение короткого промежутка внешнего времени проживает всю жизнь своих предков - внешнее время как бы сжимается по отношению к внутреннему. Затем, в зрелом возрасте, темпы изменения параметров динамики живого организма синхронизируются с темпами изменения окружающей среды. По мере старения организма темп изменения событий, определяемых внутренним временем, всё больше отстаёт от темпа изменения внешних событий, что, в конце концов, приводит к разрушению структуры. По иному происходит в ряде случаев процесс исчезновения структуры. Сначала возмущения накапливаются медленно, а затем темпы роста возмущений быстро нарастают, приводя к разрушению объекта.

Проблема существования внутреннего времени живых систем, в частности, человека и человечества, широко обсуждалась в работах физиков, биологов и философов. В монографии [1] приведён обзор некоторых работ, посвящённых этой проблеме.

Основное предположение настоящей работы состоит в том, что динамика внутренних процессов в сложной системе, описанная в рамках внутреннего времени t, не должна иметь ни начала, ни конца, то есть $t \in R$. Тогда с использованием внутреннего времени динамика таких систем может описываться системой уравнений (1).

Рассмотрим, как трансформируется такая система уравнений в случае перехода от внутреннего времени к внешнему. Введём функциональную связь между внутренним временем $t \in R$ и внешним временем T:

$$t = g(T) \,. \tag{2}$$

Предположим, что система (1) является автономной, - оператор A не зависит от времени, - то есть в рамках описания во внутреннем времени внешние условия, в первом приближении, не влияют на динамику системы. Тогда получим систему уравнений относительно внешнего времени

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dg}{dT} AX \,. \tag{3}$$

Множество значений вектора X, являющихся решениями системы уравнений

$$AX = 0 \,, \tag{4}$$

описывает совокупность стационарных состояний систем (1) и (3). Если вблизи стационарного состояния ввести некоторое возмущение, то поведение структуры во внутреннем времени может быть описано уже системой линейных дифференциальных уравнений для возмущённой части вектора X.

Решение системы уравнений

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{A}\widetilde{X} \,, \tag{5}$$

где $\widetilde{X} = X - X_S$, X_S стационарное состояние системы, а $\widetilde{A}$ - линейный оператор, хорошо известно [2]. (В дальнейшем будем опускать значки над вектором и оператором). Если задаться начальным условием $\varphi(0) = X_0$, то решение системы (5) в операторной форме имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{tA} X_0 . \qquad (6)$$

В предположении о линейности оператора A можно выписать и решение системы уравнений (3)

$$\widetilde{\varphi}(T) = e^{g(T)A} X_0(g^{-1}(0)) . \qquad (7)$$

Проблема состоит в выборе преобразования (2), адекватно осуществляющего отображение внешнего времени на внутреннее, и в физической интерпретации решения (7).

Целесообразно рассматривать, как минимум, два варианта.

1. Начальный период существования структуры во внешнем времени должен соответствовать лучу $-\infty < t < 0$. Точка $t \to -\infty$ должна отображаться в точку $T = T_0$ - момент рождения структуры.

2. Конечный период существования структуры во внешнем времени должен соответствовать отрезку $0 < t < \infty$. Точка $t \to \infty$ должна отображаться в точку $T = T_0$. - момент разрушения структуры.

В качестве отображающих функций, обладающей этим свойством, могут быть выбраны логарифмические функции. Использование именно этих функций позволяет наиболее полно учесть особенности динамики живых организмов и самоорганизующихся систем, связанные с изменением темпов развития в различные периоды существования. Аналогичное предложение относительно связи физического и исторического времени сделано в [1] применительно к исследованию динамики человеческого общества. В этом случае внешнее время T может быть названо экспоненциальным временем.

1. $$t = a\ln(T - T_0) + b, \quad T > T_0, \quad T = T_0 + \exp\frac{t-b}{a} \qquad (8)$$

2. $$t = -a\ln(T_0 - T) + b \quad T < T_0, \quad T = T_0 - \exp\frac{b-t}{a} . \qquad (9)$$

Здесь $a > 0, \quad b, \quad T_0$.- действительные числа.

Если система уравнений (1) автономна, то трансформированная система уравнений автономной уже не является и имеет вид в случае 1:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{a}{T - T_0} AX \qquad (10)$$

и в случае 2:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{a}{T_0 - T} AX \tag{11}$$

Система рождается (10) или гибнет (11) в определённый момент внешнего времени T_0 .

Так как линеаризованная система (5) имеет аналитическое решение (6), то аналитическое решение системы (10) при $T > T_0$ может быть получено как результат подстановки в (7) выражения (8).

$$\widetilde{\varphi}(T) = e^{(a\ln(T-T_0)+b)A} X_0 = \exp[(a\ln(T - T_0) + b)A]\widetilde{\varphi}(T_0 + \exp(-\frac{b}{a})), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{\varphi}(T_0 + \exp(-\frac{b}{a})) = \varphi(0) \tag{13}$$

Если в (12),(13) положить $T_0 \to -\infty$ и принять $T_0 = -\exp(-\frac{b}{a})$,тогда получим $\widetilde{\varphi}(T) = \exp(-a\frac{T}{T_0}A)\varphi(0)$.Если теперь дополнительно положить $T_0 = -a$, что позволяет однозначно определить коэффициенты $a,\ b,$, то при значениях t, близких к нулю, получаем $\widetilde{\varphi}(T) \approx \exp(TA)\varphi(0) = \varphi(t)$. Таким образом, класс линейных автономных систем асимптотически [3] является частным случаем рассматриваемого нами класса систем в экспоненциальном времени при специальном подборе коэффициентов отображения.

Примем далее $a = 1; \quad b = 0$. Тогда система уравнений (10) или упростится

$$\frac{dX}{dT} = \frac{1}{T - T_0} AX , \tag{14}$$

а её решение примет вид

$$\widetilde{\varphi}(T) = e^{\ln(T-T_0)A} X_0 = \exp[\ln(T - T_0)A]\widetilde{\varphi}(T_0 + 1). \tag{15}$$

Введём обозначение

$$Y^A = \exp[\ln(Y)A]. \tag{16}$$

Тогда решение системы уравнений (15) примет вид

$$\widetilde{\varphi}(T) = (T - T_0)^A \widetilde{\varphi}(T_0 + 1). \tag{17}$$

Обычно оператор A задан своей матрицей в некотором базисе. Требуется явно вычислить матрицу оператора Y^A в том же базисе. Ниже рассмотрим только случай оператора, характеристическое уравнение которого

$$\det|A-\lambda E|=0 \tag{18}$$

имеет различные корни. Существование кратных корней внесёт в рассмотрение задачи некоторые особенности, связанные с внутренними резонансами системы, и этот случай должен быть рассмотрен особо[2],[17].

В собственном базисе, в котором матрица оператора A диагональна. она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 \ldots 0\\ 0\ldots.\lambda_n\end{pmatrix}, \tag{19}$$

где λ_i - собственные числа. Матрицы операторов e^{At} и Y^A также имеют диагональную форму

$$e^A=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}..0\\ 0\ldots.e^{\lambda_n t}\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$Y^A=\begin{pmatrix}Y^{\lambda_1}..0\\ 0\ldots.Y^{\lambda_n}\end{pmatrix} \tag{21}$$

Система уравнений (14) может быть решена, следуя [2], следующим образом:

1) составить вековое или характеристическое уравнение $\det|A-\lambda E|$;
2) найти его корни $\lambda_1,...,\lambda_n$ (мы предполагаем, что они различны);
3) найти собственные векторы $\xi_1,...,\xi_n$ из линейных уравнений $A\xi_k=\lambda_k\xi_{k,}\quad \xi_k\neq 0$
4) разложить начальное условие, соответствующее в терминах экспоненциального времени $T=T_0+1$, по собственным векторам $X_0=\sum_{k=1}^{n}C_k\xi_k$;
5) написать ответ $\widetilde{\varphi}(T)=\sum_{k=1}^{n}C_k(T-T_0)^{\lambda_k}\xi_k$.

Отсюда следует важный вывод, являющийся обобщением результата [2.С.141]. Если оператор A диагонален, то элементы матрицы $(T-T_0)^A \quad T>T_0$ в любом базисе являются линейными комбинациями степенных функций $(T-T_0)^{\lambda_k}$, где λ_k-собственные числа матрицы A.

В терминах собственных векторов и собственных чисел линейная задача с диагональной матрицей в терминах внешнего времени разбивается на n независимых комплексных линейных уравнений типа

$$\frac{dx}{dT}=\frac{\lambda x}{T-T_0} \ . \qquad (22)$$

Решение каждого из них имеет вид

$$x(T)=(T-T_0)^{\lambda}x(T_0+1)=(T-T_0)^{\lambda}x_0 \, . \qquad (23)$$

Если собственное число матрицы A действительно ($\lambda \in R$), то могут быть рассмотрены следующие частные случаи поведения динамической системы вблизи особой (стационарной) точки в терминах внешнего времени.

1. $-\infty<\lambda<0$ - в этом случае при стремлении $T \to T_0$ сверху значения зависимой переменной (параметра целого системы) стремятся к бесконечности тем быстрее, чем больше модуль величины $\lambda \in R$. Физическая интерпретация динамики системы в данном случае может быть следующей. Можно считать, что выражение (22) лишь асимптотически описывает поведение системы при временах, больших, чем T_0, а при $T>T_0$, $T \to T_0$ зависимая переменная получила значительное возмущённое значение $x(T_0+\delta T)$.

Можно предположить также, что до момента T_0 система находилась в области притяжения другого аттрактора, из которой она вышла по той или иной причине. При $T>T_0+1$ приближение к стационарной точке происходит по степенному закону, то есть значительно слабее, чем по экспоненциальному закону во внутреннем линейном времени, тогда как вблизи точки T_0 наоборот, затухание возмущения происходит значительно интенсивнее.

2. При $\lambda=0$ имеем постоянное значение $x=x_0$.

3. $0<\lambda<\infty$ - модель описывает степенную динамику роста переменной. При этом можно выделить две зоны изменения параметра:

3а. $0<\lambda<1$, когда производная от x по T при $T \to T_0$ стремится к бесконечности, то есть происходит «ударное» возникновение системы с постепенным уменьшением производной до нуля при $T \to \infty$;

3б. $1<\lambda<\infty$, когда производная от x по T при $T \to T_0$ стремится к нулю, то есть происходит «безударное» возникновение системы с постепенным увеличением производной до бесконечности при $T \to \infty$.

Если $\lambda=1$, то зависимость обобщённой координаты от экспоненциального времени становится линейной.

Вблизи точки $T=T_0+1$ характер изменения $x(T)$ аналогичен характеру изменения $x(t)$ вблизи точки $t=0$. То есть поведение системы, описываемой уравнением (22), вблизи момента $T = T_0 + 1$,- который может быть назван моментом созревания, оказывается близким к поведению породившей её системы во внутреннем времени, тогда как при удалении от этой точки как в сторону больших T, так и в сторону значений T, близких к T_0, существенно отличается от неё, приобретая новые свойства.

В случае мнимого собственного числа $\lambda = i\omega$ и решение принимает следующий вид:

$$x(T) = x_0 (T - T_0)^{i\omega} = x_0 \exp(i\omega \ln(T - T_0)) . \qquad (24)$$

Полученное решение характеризует колебательный процесс с постоянной амплитудой и переменной частотой. Вычислим зависимость частоты процесса от времени. Преобразуем формулу (24) следующим образом. Введём время T_1, то есть такой момент времени, в который мы вычисляем искомую частоту колебаний, и малый отрезок времени dT, характеризующий эту частоту. Тогда разлагая показатель экспоненты решения (24) в ряд Тейлора вблизи точки T_1 по dT, получим

$$x(T) = x_0 \exp(i\omega \ln(T_1 - T_0)) \exp(i\omega \frac{dT}{T_1 - T_0}) . \qquad (25)$$

Здесь величина $\frac{\omega}{T_1 - T_0}$ характеризует мгновенную частоту колебаний в момент T_1.

Если рассматривать значения T, стремящиеся к T_0, то частота колебаний растёт по гиперболическому закону и даже стремится к бесконечности в случае приближения к моменту рождения структуры.

Точка $T = T_0 + 1$ является с точки зрения колебательных процессов, описываемых полученными уравнениями, границей раздела. Зону $0 < T - T_0 < 1$ мы можем назвать зоной быстрых колебаний, частота которых убывает и стремится к ω при $(T - T_0) \to 1$. В этом режиме может быть осуществлена синхронизация внутренних процессов в системе с внешними процессами в окружающей среде (поле).

Затем частота, замедляясь, падает до нуля. Этот режим может быть назван режимом низкочастотных колебаний. Изменение частоты в функции от внешнего времени становится всё более слабым

Если рассматривать комплексное значение λ, то происходит наложение закона изменения амплитуды колебаний, определяемой реальной частью коэффициента λ, на закон изменения частоты колебаний , определяемой его мнимой частью.

Если рассмотреть случай, когда момент $T = T_0$ является завершающим в жизни структуры, то необходимо все аналогичные преобразования произвести с уравнением (11). Получим подобные решения, отличающееся тем, что график зависимости $x(T)$ симметричен относительно точки $T = T_0$.

1. . $-\infty < \lambda < 0$ При стремлении $T \to T_0$ значения зависимой переменной асимптотически стремятся к бесконечности. Возникает режим, который был назван С.П. Курдюмовым [4 - 6] режимом с обострением. За конечный промежуток времени система стремится достигнуть бесконечного значения зависимой переменной. К такого типа режимам относилась до последних лет динамика роста человеческого общества, описываемая уравнением

$$\frac{dN}{dT} = \frac{N}{T_0 - T}, \tag{26}$$

что соответствует λ=-1 [1, 7-10].

В двух других режимах параметры системы либо гладко, либо ударным образом стремятся к стационарному состоянию, при этом как совершая, так и не совершая колебания. Такие режимы могут описывать либо стабилизацию некоторого стационарного состояния, либо плавное разрушение старой структуры.

Комплексные степенные функции встречаются и в других задачах, например, при решении автономных дифференциальных уравнений со степенными функциями в правой части, а также в случае нелинейного комплексного дифференциального уравнения, в правой части которого стоит дробно-линейная функция от зависимой и независимой переменной [11].

Анализ решения одномерного комплексного уравнения, как было показано выше, даёт ключ к решению многомерных задач, позволяющих исследовать динамику сложных систем в режимах рождения и разрушения.

При этом возникает возможность также решать обратные задачи, по заданной реализации определять систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет динамическая система, поведение которой исследуется экспериментально. Пример решения такой задачи приведён в работе [12]. Рассмотрим этот пример с позиций концепции экспоненциального (внешнего) времени.

Рядом авторов было обнаружено, что катастрофическое разрушение сложных систем с позиций внешнего наблюдателя (то есть во внешнем времени) хорошо описывается изменением одного параметра (параметра целого системы), для описания динамики которого во внешнем времени была найдена некоторая универсальная формула.

В книге [6,с.8-10] написано: «Второй пример – динамика одного из основных экономических показателей, индекса Доу-Джонса, перед кризисом 1929 [13] и содержания ионов хлора в источниках перед землетрясением в Кобе в 1995 году [13]. В обоих случаях она хорошо описывается одной и той же формулой

$$I(t) = A + B(T_0 - T)^{\alpha}[1 + C\cos(\omega\log(T_0 - T) - \varphi)], \qquad (27)$$

которая, по-видимому, обусловлена коллективным поведением одного и того же типа. Иначе говоря, мы получили два одинаковых решения уравнений, которых пока не знаем».

Покажем, что комплексификация формулы (27) позволяет отождествить её с частным случаем решения системы уравнений (11).

Для этого преобразуем формулу (27) к виду:

$$I(t) = \mathrm{Re}\{A + B(T_0 - T)^{\alpha}[1 + C_1(T_0 - T)^{i\omega\log e}]\}, \qquad (28)$$

где введено обозначение $C_1 = C\exp(-i\varphi)$.

Рассмотрим комплексную функцию

$$\tilde{I}(t) = \tilde{A} + \tilde{B}(T_0 - T)^{\alpha} + \tilde{C}(T_0 - T)^{\beta} + \ldots, \qquad (29)$$

реальной частью которой, в частном случае

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = B, \quad \tilde{C} = BC_1, \beta = \alpha + i\omega\log e, \qquad (30)$$

является функция $I(t)$.

В более общем случае сюда можно добавить конечное число степенных одночленов, характеризующих более высокочастотные моды изучаемого процесса. Функции такого типа являются степенными полиномами с комплексными показателями степени [14-16]. Их корректный анализ возможен путём рассмотрения искомых функций в области спиральных комплексных чисел, введённых в монографии [16].

Осуществим формальную замену переменных, являющуюся частным случаем формулы (11)

$$I_0 = \tilde{I} - \tilde{A}, \quad t = \ln(T_0 - T), \frac{dt}{dT} = \frac{1}{T - T_0}. \qquad (31)$$

Тогда получаем формулу

$$I_0(t) = \tilde{B}\exp\alpha t + \tilde{C}\exp\beta t. \qquad (32)$$

с комплексными параметрами, где t является внутренним линейным временем в отличие от внешнего экспоненциального времени, описывающего соответствующий процесс .

Уравнение, решением которого является функция (32), есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка в линейном времени.

$$\frac{d^2 I_o}{dt^2} - (\alpha + \beta)\frac{dI_o}{dt} + \alpha\beta I_0 = 0\,. \tag{33}$$

Это уравнение эквивалентно системе линейных уравнений первого порядка с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= (\alpha + \beta)J - \alpha\beta I_0 \\ \frac{dI_0}{dt} &= J \end{aligned} \tag{34}$$

и является частным случаем системы (5) для двумерного комплексного вектора, описывающего динамику системы в терминах внутреннего линейного времени.

Возвращаясь к описанию динамики системы в терминах внешнего (экспоненциального) времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dT} &= -\frac{1}{T_0 - T}[(\alpha + \beta)J - \alpha\beta I_0] \\ \frac{dI_0}{dt} &= -\frac{J}{T_0 - T} \end{aligned} \tag{35}$$

Последняя система является частным случаем рассмотренной нами выше системы (11)

Комплексификация аппроксимационной формулы и введение в рассмотрение экспоненциального внешнего и линейного внутреннего времени позволили вскрыть степенную сущность представленной в [6] аппроксимации и показать, что функция, описываемая формулой (27) является реальной частью комплексного степенного многочлена, получаемого из решения системы линейных дифференциальных уравнений путём введения внешнего экспоненциального времени.

Добавление в формуле (32) конечного числа степенных одночленов принципиально не изменит полученных выводов, а лишь несколько усложнит выкладки.

Это позволяет предложить обобщение формулы (32) с целью определения или аппроксимации всё более мелкомасштабных мод изменения параметра, описывающего катастрофические события в виде

$$\tilde{I}(T) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i (T_0 - T)^{\alpha_i}\,.. \tag{36}$$

Проведя преобразования, аналогичные выполненным ранее, можно показать, что функция $\tilde{I}(T)..$ может быть приведена к форме, являющейся решением системы линейных дифференциальных уравнений порядка m..

Приведённый пример показывает эффективность комплексификации функций, описывающих сложные и даже катастрофические процессы, и возможность за счёт комплексификации и введения замены временной переменной обнаружения скрытой линейности катастрофического процесса. Однако он показывает также, что в процессах такого рода появляется необходимость изучать комплексные степенные функции с комплексными показателями степени (комплексные степенные многочлены), что требует введения новых математических понятий.

Это утверждение обобщает широко распространённое мнение о том, что в процессах самоорганизации существенную роль играют степенные функции с не целыми показателями. Особенно часто они встречаются при изучении статистических закономерностей в самоорганизующихся системах, при изучении структурообразования в диссипативных средах и при решении других проблем нелинейной динамики.

Изучение процессов, приводящих к появлению таких функций и дифференциальных уравнений, им соответствующих, привело к созданию новых физических моделей и обнаружению неизвестных ранее явлений (открытие режимов с обострением, открытие вихре-волновых и (или) структурных резонансов со степенными зависимостями циркуляции от координат и параметров резонансного состояния от управляющего параметра).[16, 17]

Активное внедрение степенных функций в приложения к различным практическим задачам, связанным с самоорганизацией сложных структур привело к развитию новых математических методов исследования. В математике появилось новое бурно развивающееся направление – степенная динамика, изучающее свойства степенных многочленов от действительных и комплексных переменных, не только с целыми, но и с дробными показателями степени, понятие многочлена было обобщено за счёт включения операторов дифференцирования, что позволило разработать общие методы решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений.[14-17]

Комплексификация искомых функций, и введение рациональных степеней приводит в рамках традиционных подходов к появлению многозначных, а в пределе при переходе к действительным и комплексным показателям степени к бесконечнозначным (со счётным числом значений). функциям.

Эти дополнительные трудности порождают и новые возможности. Ведь такие функции могут легко описывать и бифуркационные события, то есть события с конечным и бесконечным числом исходов. Кроме того, многозначные степенные функции могут описывать размножение живых объектов [10, 16].

Рассмотренный пример показывает, что решение практических задач, связанных с катастрофическими явлениями в природе, экономике и технике, приводит к необходимости обобщения имеющихся результатов на случай комплексных показателей степени.

Благодарность

Автор благодарит Рэма Георгиевича Баранцева и Галину Ивановну Басину за поддержку при написании настоящей статьи и новые идеи по дальнейшему развитию полученных в ней результатов.

Литература.

1. Капица С. П. Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живёт и будет жить на Земле. М.: Наука. 1999. 190с.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1984. 272с.
3. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Едиториал УРСС. 2004. 304с.
4. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах. Сборник ВИНИТИ. Итоги науки и техники. «Современные проблемы математики. Новейшие достижения» М.: 1986 (1987). Т. 28. С. 3 - 99.
5. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур. М.: Наука. 1998. 255 с.
6. Управление риском. (Риск. Устойчивое развитие. Синергетика). М.: Наука. 2000.431с.
7. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука. 1997. 288 с.
8. Подлазов А. В. Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука. 2002. С. 324 - 345.
9. Басин М. А. Волны. Кванты. События. Волновая теория взаимодействия структур и систем. Часть 1. СПб.: Норма. 2000. 168с.
10. Басина Г. И., Басин М. А. Синергетика. Эволюция и ритмы человечества. СПб.: Норма. 2003. 260с.
11. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Изд. 2. М.: Наука. 1986. 760с.
12. Басин М.А. О функции, описывающей поведение системы перед катастрофическими событиями, и дифференциальных уравнениях,

которым она удовлетворяет. Письма в ЖТФ. 2006. Том 32. Вып. 8. С. 30-33.
13. Johansen A, Sornette D. et al. Discrete scaling in earthquake precursory phenomena: Evidence in Kobe earthquake, Japan // J. Phys. France. 1996. V. 6. P. 1391-1402.
14. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит. 1998. 288 с.

15. Басин М.А. Спиральные числа. Степенные особенности. Волны. Вихри. Грибовидные структуры. Транспортно - информационные системы. Международная междисциплинарная научно-практическая конференция: «Современные проблемы науки и образования». Керчь, 27 июня – 4 июля 2001года. Материалы конференции .Часть1. Харьков 2001. С. 12 - 13.
16. Басин М. А. Компьютеры. Вихри. Резонансы. Волновая теория взаимодействия структур и систем. Часть 2. СПб.: Норма. 2002. 144 с.
17. Басина Г. И., Басин М. А. Синергетика. Вселенная резонансов. СПб.: Норма. 2008 (в печати).