УДК 512+519.688 М А Т Е М А Т И К А

Геометрические и топологические структуры, связанные с универсальными алгебрами.

М.И.Граев, А.В.Коганов

Введен класс универсальных алгебр, с которым естественно связаны различные геометрические и топологические структуры. Статья посвящена описанию и исследованию этих структур. Для удобства термин "универсальная алгебра"заменен термином "А-система".

1. **Исходные определения.** [1, 2] Универсальной алгеброй (А-системой) называется совокупность множеств U и F_n, где n пробегает подмножество N_0 натуральных чисел, с заданными отображениями

$$\varphi_n : F_n \times U^n \to U, \quad n \in N_0. \tag{1}$$

Множество U называется носителем А-системы, а элементы $f \in F_n$ – n-арными операциями. Образ пары $f \in F_n$ и $(u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ при отображении φ_n обозначается через $f(u_1, \ldots, u_n)$. А-система с носителем U и множеством операций $F = \cup F_n$ обозначается, через (U, F) или подробнее через (U, F, φ), где $\varphi = \{\varphi_n\}$.

Естественным образом определяются гомоморфизм одной А-системы в другую и изоморфизм двух А-систем.

Для любой А-системы (U, F, φ) подмножество $V \subset U$ называется замкнутым относительно операций $f \in F$, короче, F-подмножеством, если $\varphi_n (F_n \times V^n) \subset V$ для всех $n \in N_0$. Каждое F-подмножество является носителем А-системы (V, F) с тем же множеством операций F, что и исходная А-система; ее называют подсистемой А-системы (U, F).

Свяжем с каждым подмножеством $X \subset U$ носителя А-системы (U, F, φ) возрастающую последовательность $\{Y_n\}$ подмножеств в U :

$$Y_1 = X, \quad Y_k = Y_{k-1} \cup \left(\cup \varphi_n (F_n \times Y_{k-1}^n)\right) \quad \text{при} \quad k > 1. \tag{2}$$

Очевидно, что $V = \cup Y_k$ — F-подмножество в U. Говорят, что $X \subset V$ является порождающим подмножеством в V.

2. **Правильные А-системы.** Для любой А-системы (U, F) назовем элемент $u \in U$ простым, если его нельзя представить в виде $u = f(u_1, \ldots, u_n)$, где $(u_1, \ldots, u_n) \neq (u, \ldots, u)$. Очевидно, элемент $u \in U$ является простым тогда и только тогда, когда он принадлежит любому подмножеству $X \subset U$, порождающему U.

Назовем А-систему (U, F) правильной, если

[0]Поддержано РФФИ, грант 01-01-00754.

1) ее носитель U порожден подмножеством $X \subset U$ простых элементов и

2) для каждого элемента $u \in U$, не являющегося простым, существуют единственные число $n \in N_0$, операция $f \in F_n$ и последовательность $(u_1, \ldots, u_n) \neq (u, \ldots, u)$. определенная с точностью до порядка свои членов, такие что $u = f(u_1, \ldots, u_n)$.

Предложение 1. *Любая подсистема правильной А-системы является правильной.*

Назовем подмножество $X \subset U$ простых элементов правильной А-системы ее базой и будем писать $(U, F) = U[X]$ или $U[x_1, \ldots, x_n]$, если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Мощность X назовем рангом А-системы и обозначим через $r(U)$.

Введем две числовые функции на носителе правильной А-системы $U[X]$.

Положим $X_1 = X$ и $X_k = Y_k \setminus Y_{k-1}$ при $k > 1$, где Y_k – подмножества в U, определенные равенствами (2). Если $u \in X_k$, то будем говорить, что элемент $u \in U$ имеет высоту k и писать $h(u) = k$. В силу этого определения, любой элемент $u \in U$ высоты $k > 1$ представим в виде

$$u = f(u_1, \ldots, u_n), \quad \text{где} \quad \max(h(u_1), \ldots, h(u_n)) = k - 1. \tag{3}$$

Определим длину $l(u)$ элементов $u \in U$ правильной А-системы (U, F) индукцией по их высоте $h(u)$. Если $h(u) = 1$, то полагаем $l(u) = 1$. Если $h(u) > 1$, то элемент $u \in U$ однозначно представим в виде (3), и мы полагаем:

$$l(u) = l(u_1) + \ldots + l(u_n).$$

Предложение 2. *Если в А-системе нет унарных операций, то $h(u) \leqslant l(u)$ для всех $u \in U$.*

Функции h и l задают на носителе U правильной А-системы отношение частичной упорядоченности. Именно, мы пишем: $u' \leqslant_h u$, если $u' = u$ или $h(u') < h(u)$; $u' \leqslant_l u$, если $u' = u$ или $l(u') < l(u)$. Заметим, что отношения $\leqslant_h$ и $\leqslant_l$ не инвариантны относительно операций $f \in F$, т.е. , например, из условий $u_i' \leqslant_h u_i$, $i = 1, \ldots, n$ не следует, вообще говоря. что $f(u_1', \ldots, u_n') \leqslant f(u_1, \ldots, u_n)$.

Предложение 3. *Пусть $V_1 = U[y_1, \ldots, y_n]$ и $V_2 = U[z_1, \ldots, z_n]$ – F-подмножества конечного ранга n правильной А-системы такие что $V_1 \subset V_2$. Тогда, если $h(y_i) = h(z_i)$ для всех i, то $V_1 = V_2$.*

В правильной А-системе (U, F) из включения $V_1 \subset V_2$, где V_1, V_2 – F-подмножества конечных рангов, не следует, вообще говоря, неравенство $r(V_1) \leqslant r(V_2)$. Справедливо, однако, более слабое утверждение (свойство обрыва возрастающих цепочек).

Теорема 1. *В правильной А-системе любая возрастающая последовательность $V_1 \subset \ldots V_n \subset \ldots$ F-подмножеств конечного ранга такая, что $r(V_n) \geqslant r(V_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$, стабилизируется на конечном шагу. шагу.*

Для доказательства достаточно убедиться, что стабилизируется сумма $\sum_{y\in Y_n} h(y)$, где Y_n – база в V_n. Отсюда и из предложения 3 следует утверждение теоремы.

3. **Свободные, свободные коммутативные и свободные идемпотентные А-системы.** Рассмотрим частные случаи правильных А-систем.

Назовем правильную А-систему (U, F) свободной, если

1) равенство
$$f(u_1, \dots, u_k) = f'(u'_1, \dots, u'_l) \tag{4}$$
имеет место тогда и только тогда, когда $f = f'$ (и,значит, $k = l$) и $u_i = u'_i$ для всех i;
2) не существует соотношений вида $u = f(u, \dots, u)$.

Назовем правильную А-систему (U, F) свободной коммутативной , если условие 1 предыдущего определения заменено более слабым: равенство (4) имеет место тогда и только тогда, когда когда $f = f'$, и последовательности $(u_1, \dots, u_k)$ и $(u'_1, \dots, u'_l)$ различаются только порядком.

Назовем правильную А-систему (U, F) свободной идемпотентной, если
$$u = f(u, \dots, u) \quad \text{для всех} \quad u \in U \quad \text{и} \quad f \in F,$$
и никаких других соотношений не существует.

Отметим, что для свободных идемпотентных систем все F-подмножества ранга 1 являются одноэлементными.

Предложение 4. *Любая подсистема свободной, свободной коммутативной и свободной идемпотентной А-системы является также соответственно свободной, свободной коммутативной и свободной идемпотентной А-системой.*

Предложение 5. *Две свободные (соответственно, свободные коммутативные и свободные идемпотентные) А-системы (U, F) и (U', F') изоморфны тогда и только тогда, когда $r(U) = r(U')$ и $\#F_n = \#F'_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $F_n \subset F$ и $F'_n \subset F'$ – подмножества n-арных операций.*

Назовем свободную А-систему свободным группоидом, если множество операций F состоит из одной бинарной операции (умножение)[3]. Существует вложение σ носителя U произвольной свободной А-системы $U[X] = (U, F)$ с базой X в свободный группоид $G[X \cup F]$ с базой $X \cup F$:
$$\sigma : U \to G[X \cup F].$$
Это вложение определяется индукцией по высоте $h(u)$ элементов $u \in U$. Если $h(u) = 1$, т,е. $u \in X$, то полагаем $\sigma(u) = u$. Пусть $\sigma(u)$. уже определено для элементов высоты меньшей n. Определим $\sigma(u)$ при $h(u) = n$.

Сначала индукцией по $k = 1, 2, \ldots$ определим отображения $\tau_k : (U_n)^k \to G[X \cup F]$, где $U_n \subset U$ – подмножество элементов высоты меньшей n :

$$\tau_1(u) = \sigma(u), \qquad \tau_k(u_1, \ldots, u_k) = \tau_{k-1}(u_1, \ldots, u_{k-1})\, \sigma(u_k).$$

Заметим, что отображения $\tau_k : (U_n)^k \to G[X \cup F]$ согласованы с отображениями $\tau_k : (U_m)^k \to G[X \cup F]$ при $m < n$.

Пусть $h(u) = n$. Элемент u имеет и притом единственное представление в виде $u = f(u_1, \ldots, u_k)$, где $f \in F$, $h(u_i) < h(u)$, $i = 1, \ldots, k$, и мы полагаем

$$\sigma(u) = f \cdot \tau_{k(f)}(u_1, \ldots, u_{k(f)}),$$

Построенное отображение $\sigma : U \to G[X \cup F]$ инъективно и исходная свободная A-система $U[X]$ однозначно восстанавливается, с точностью до изоморфизма, по множеству $\sigma(U) \subset G[X \cup F]$.

4. **Графы и отношение частичной упорядоченности, ассоциированные с правильными A-системами.** Скажем, что элемент $u' \in U$ носителя правильной A-системы подчинен элементу $u \neq u'$, если существуют последовательность $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$, содержащая u' и n-арная операция $f \in F$ такие что $u = f(u_1, \ldots, u_n)$.

Определим, используя отношение подчиненности, несколько новых структур на носителе U правильной A-системы.

4.1. *Структура направленного графа.* Вершинами этого графа являются элементы $u \in U$, а направленные ребра соединяют каждый непростой элемент u со всеми подчиненными ему элементами, т.е. с элементами u_i, входящими в разложение $u = f(u_1, \ldots, u_n)$. При этом, если u_i входит в разложение n раз, то из u в u_i проводится n ребер. Отметим, что из каждой вершины графа выходит лишь конечное число ребер, а входит в нее, вообще говоря, бесконечное число ребер.

Предложение 6. *Любая свободная A-система однозначно определяется, с точностью до изоморфизма, ассоциированным с ней графом.*

4.2. *Структура частично упорядоченного множества на U.* Положим $u' \leqslant u$, если либо $u' = u$, либо существует конечная последовательность $u = u_1, u_2, \ldots, u_n = u'$ элементов, в которой каждый последующий элемент подчинен предыдущему. Эта частичная упорядоченность не согласована, вообще говоря, с операциями $f \in F$. Отметим, что из $u \leqslant v$ следует $h(u) \leqslant h(v)$ и $l(u) \leqslant l(v)$.

4.3. *Схемы разложений элементов $u \in U$.* Свяжем с каждым элементом $u \in U$ конечный направленный граф $S(u)$ типа дерева, который назовем схемой разложений элемента u. Его вершину, в которую ребра не входят, назовем корнем, а вершины, из которых ребра не выходят - листьями.

Определим $S(u)$ индукцией по высоте $h(u)$. Если $h(u) = 1$, т.е. $u \in X$, где X – база, то по определению, $S(u)$ состоит из одной точки, являющейся одновременно и корнем, и листом. Пусть схемы $S(u)$ уже определены для всех элементов u высоты меньшей n, где $n > 1$. Тогда, если $h(u) = n > 1$, то представим u в виде $u = f(u_1, \ldots, u_k)$, где $h(u_i) < h(u)$, $i = 1, \ldots, k$. По определению, схема $S(u)$ получается из схем $S(u_1), \ldots, S(u_k)$ добавлением одной вершины (корня дерева $S(u)$) и k ребер, идущих от этого корня к корням деревьев $S(u_1), \ldots, S(u_k)$. При этом корень снабжается меткой f – знаком соответствующей операции. Таким образом, каждая вершина дерева $S(u)$, не являющаяся листом, предполагается снабженной меткой $f \in F$.

Отметим, что высота $h(u)$ элемента u равна максимальному числу ярусов схемы $S(u)$, а длина – числу ее листьев. Таким образом, если $S(u) = S(v)$, то $h(u) = h(v)$ и $l(u) = l(v)$.

5. **А-системы S-подмножеств.** Назовем S-подмножествами правильной А-системы (U, F) подмножества $V \subset U$ элементов с одной и той же схемой разложения.

Свяжем с каждой правильной А-системой (U, F) другую А-систему (Σ, F), носитель которой – совокупность Σ всех S-подмножеств в U, а множество операций совпадает с множеством операций F исходной А-системы.

Определим действие операций $f \in F$ на множестве Σ. Пусть $f \in F_n$ — произвольная n-арная операция, $V_1, \ldots, V_n$ — произвольные S-подмножества в U, и $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$ — их представители. Предполагается, что если какие-либо из множеств V_i совпадают, то в качестве их представителей берется один и тот же элемент. Определим $V = f(V_1, \ldots, V_n)$ как S-подмножество, содержащее элемент $v = f(v_1, \ldots, v_n)$. Это определение корректно, поскольку не зависит от выбора представителей $v_i \in V_i$.

Свойство А-системы (Σ, F).

1) А-система (Σ, F) правильна.
2) Если (U, F) – свободная, свободная коммутативная или свободная идемпотентная А-система, то А-система (Σ, F) также является соответственно свободной, свободной коммутативной или свободной идемпотентной А-системой.
3) Если (U, F) – свободная или свободная коммутативная А-система, то базис А-системы (Σ, F) состоит из одного элемента – S-подмножества X элементов высоты 1.
4) Если (U, F) – свободная идемпотентная А-система, то S-подмножество V принадлежит базису А-системы (Σ, F), т.е. является простым элементом этой А-системы, тогда и только тогда, когда либо $V = X$, либо элементы $v \in V$ имеют вид $u = f(v_1, \ldots, v_n)$, где $h(v_i) < h(v)$, и все v_i принадлежат одному и тому же S-подмножеству.

6. **Решетки F-подмножеств конечного ранга.** Обозначим через $\widetilde{L} = \widetilde{L}(U, F)$ совокупность всех F-подмножеств $V \subset U$ правильной А-системы (U, F).

Множество $\widetilde{L}$ образует решетку относительно естественных операций суммы (объединения) $\vee$ и произведения (пересечения) $\wedge$ [4].

Теорема 2. *Совокупность L F-подмножеств $V \subset U$ конечного ранга является подрешеткой в $\widetilde{L}$, и*

$$r(U_1 \wedge U_2) + r(U_1 \vee U_2) \leqslant r(U_1) + r(U_2) \qquad \text{для любых } U_1,\, U_2 \in L. \tag{5}$$

Базы подмножеств $U_1 \wedge U_2$ и $U_1 \vee U_2$ принадлежат объединению баз подмножеств U_1 и U_2.

Заметим, что решетка L не полумодулярна, и включение $U' \subset U''$ не влечет в ней, вообще говоря, неравенство $r(U') \leqslant r(U'')$.

Назовем F-подмножество $U' \subset U$ конечного ранга r плоским подмножеством, если не существует F-подмножеств ранга $r_1 \leqslant r$, строго содержащих U'.

Согласно определению, для любых плоских подмножеств U' и U'' из включения $U' \subset U''$ следует $r(U') \leqslant r(U'')$; при этом если $r(U') = r(U'')$, то $U' = U''$.

Теорема 3. *Пересечение $V = \cap_\alpha V_\alpha$ плоских подмножеств V_α рангов r_α является плоским подмножеством ранга $r \leqslant \min_\alpha r_\alpha$. В частности, если $r = r_\alpha$, для некоторого α, то $V = V_\alpha$.*

Следствие. *Совокупность $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, F)$ плоских подмножеств правильной А-системы (U, F) наделена структурой решетки по включению; в ней произведение $U_1 \wedge U_2$ плоских подмножеств U_1 и U_2 задается так же, как и в решетке L, а их сумма $U_1 \vee U_2$ есть пересечение плоских подмножеств, содержащих U_1 и U_2.*

Заметим, что $\mathcal{L}$ не является подрешеткой в L, поскольку определения суммы в $\mathcal{L}$ и L различны.

Из теоремы 1 и теоремы 3 следует, что для каждого F-подмножества конечного ранга правильной А-системы существует минимальное содержащее ее плоское подмножество.

Теорема 4. *Ранги плоских подмножеств U_1, U_2, $U_1 \wedge U_2$ и $U_1 \vee U_2$ связаны соотношением* (5).

Следствие. *Если $r(U_1) = r(U_2) = r(U_1 \wedge U_2) + 1$ и $U_1 \neq U_2$, то $r(U_1 \vee U_2) = r(U_1) + 1$. Это свойство эквивалентно полумодулярности решетки $\mathcal{L}$* [...].

В силу полумодулярности решетки $\mathcal{L}$, плоские подмножества ранга r естественно трактовать как плоскости размерности $r - 1$. Отметим особенность возникающей так геометрии. С каждой плоскостью V размерности $r - 1$ связан фиксированный набор из r элементов в U – база подмножества V. При этом базы пересечения и объединения двух плоскостей содержатся в объединении баз этих плоскостей.

7. **Решетки плоскостей.** Назовем F-подмножество $V \subset U$ правильной А-системы (U, F) плоскостью, если любое плоское подмножество в V является плоским подмножеством в U. В частности, носитель U А-системы и пустое множество $\emptyset$ являются плоскостями.

Из определения следует:

1) Если V_1 – плоскость в U, а V_2 – плоскость в V_1, то V_2 является плоскостью в U,
2) Любое плоское подмножество в U является плоскостью и обратно, любая плоскость конечного ранга является плоским подмножеством. В частности, если ранг носителя U конечен, то любая плоскость в U является плоским подмножеством.
3) Любая плоскость $V \subset U$ является объединением всех содержащихся в ней плоских подмножеств из U.

Теорема 5. *Пересечение* $V = \bigcap_\alpha V_\alpha$ *любой совокупности плоскостей* V_α *является плоскостью.*

Следствие. *Множество* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *плоскостей в носителе* U *правильной А-системы* (U, F) *наделено структурой решетки, в которой для любых плоскостей* V_1 *и* V_2 *элемент* $V_1 \wedge V_2$ *есть пересечение плоскостей, а* $V_1 \vee V_2$ *– минимальная плоскость, содержащая* V_1 *и* V_2.

Совокупность $\mathcal{L}$ *плоских подмножеств является подрешеткой этой решетки.*

Скажем, что плоскость V_1 покрывает плоскость V_2, если V_1 строго содержит V_2, и не существует плоскости V, отличной от V_1 и V_2 такой, что $V_1 \supset V \supset V_2$.

Теорема 6. *Плоскость* V' *покрывает плоскость* $V \subset U$, $V \neq U$ *тогда и только тогда, когда* V' *порождена множеством* V *и элементом* $x \notin V$. *Таким образом, множество плоскостей, покрывающих плоскость* $V \neq U$, *непусто.*

Теорема 7. *Решетка* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *удовлетворяет условию полумодулярности: если плоскости* U_1 *и* U_2, $U_1 \neq U_2$ *покрывают плоскость* U_0, *то* $U_1 \vee U_2$ *покрывает* U_1 *и* U_2.

Примечание. Приведенные конструкции полумодулярных решеток можно распространить и на индуктивные пределы правильных А-систем.

8. **Топологические и метрические А-системы.** Назовем А-систему (U, F) AT-системой (соответственно, AM- системой), если на ее носителе U задана структура топологического (соответственно метрического) пространства, относительно которой все операции $f \in F$ непрерывны.

Если (U, F) – свободная А-система, то топологию (метрику), заданную на ее базе $X \subset U$, можно продолжить до топологии (соответственно, метрики) на всем носителе U. Приведем конструкцию этой топологии (метрики).

Пусть на X задана топология, т.е. для каждого элемента $x \in X$ определен базис ее окрестностей. Определим базис окрестностей произвольного элемента $u \in U$ высоты $n > 1$ в предположении, что для всех элементов высоты меньшей n этот базис уже определен. Элемент u представим, и притом единственным способом, в виде $u = f(u_1, \dots, u_k)$, где $h(u_i) < n$, $i = 1, \dots, k$, и значит, базисы окрестностей элементов u_i уже определены. По определению, базис окрестностей элемента u есть совокупность подмножеств

$$f(V_{u_1}, \dots, V_{u_k}) = \{u' = f(u'_1, \dots, u'_k) \mid u'_1 \in V_{u_1}, \dots, u'_k \in V_{u_k}\},$$

где $V_{u_1}, \dots, V_{u_k}$ пробегают базисы окрестностей элементов $u_1, \dots, u_k$.

Из определения следует, что все S-подмножества $U_S \subset U$ открыты и замкнуты в этой топологии и что свойства хаусдорфовости, связности и локальной компактности сохраняются при продолжении топологии с X на U.

Пусть теперь на X задана метрика ρ, архимедова или неархимедова. Продолжим ее на любое S-подмножество $U_S \subset U$. Пусть эта метрика уже продолжена на S-подмножества с элементами высоты меньшей n, и пусть U_S – любое S-подмножество с элементами высоты $n > 1$. Согласно определению S-подмножеств, существуют $f \in F$ и S-подмножества $U_{S_1}, \dots, U_{S_k}$ с элементами высоты меньшей n, где k – арность f, такие что S-подмножество U_S состоит из элементов вида

$$u = f(u_1, \dots, u_k), \quad h(u_i) < h(u), \quad \text{где} \quad u_i \in U_{S_i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

т.е. $U_S = U_{S_1} \times \ldots \times U_{S_n}$.

В силу индуктивного предположения, метрика на S-подмножествах U_{S_i} уже определена. В случае, когда эта метрика архимедова, определим $\rho(u, v)$ для любых элементов $u = f(u_1, \dots, u_k)$ и $v = f(v_1, \dots, v_k)$ из U_S по формуле

$$\rho(u, v) = \sqrt{\rho^2(u_1, v_1) + \ldots + \rho^2(u_n, v_n)}.$$

В случае, когда метрика ρ на S-подмножествах U_{S_i} неархимедова, определим $\rho(u, v)$ по формуле

$$\rho(u, v) = \max(\rho(u_1, v_1), \dots, \rho(u_n, v_n)).$$

Определенные так метрики на S-подмножествах в U, соответственно архимедовы и неархимедовы, можно различными способами продолжить до метрики ρ архимедовой или неархимедовой на всем носителе U так, что $\rho(u, v) \geqslant 1$, если u и v принадлежат различным S-подмножествам.

Приведенные конструкции переносятся с несущественными изменениями на случай свободных коммутативных и свободных идемпотентных систем.

В случае свободной идемпотентной системы хаусдорфову топологию и неархимедову метрику на X можно продолжить до другой, более слабой чем исходная, хаусдорфовой топологии (соответственно неархимедовой метрики) на U. В новой, вторичной, топологии базис окрестностей в U определяется как совокупность F-подмножеств $V \subset U$, порожденных подмножествами, открытыми в исходной топологии.

Приведем описание вторичной неархимедовой метрики на U. По определению, на S-подмножествах в U эта метрика совпадает с исходной метрикой. Продолжим ее на все множество U, т,е, определим $\rho(u,v)$ для элементов $u,v \in U$, принадлежащих различным S-подмножествам. Пусть для определенности $h(u) \leqslant h(v)$. Тогда $h(v) > 1$, а потому элемент v однозначно представим в виде

$$v = f(v_1,\ldots,v_k), \quad \text{где} \quad h(v_i) < h(v), \quad i = 1,\ldots,k.$$

Если $h(u) < h(v)$, то положим $\rho(u,v) = \max(\rho(u,v_1),\ldots,\rho(u,v_k))$.

Если $h(u) = h(v)$, то представим u в виде

$$u = f_1(u_1,\ldots,u_l), \quad \text{где} \quad h(u_i) < h(u), \quad i = 1,\ldots,l$$

и положим $\rho(u,v) = \max_{i,j}(\rho(u_i,v_j))$, где максимум берется по всем $i = 1,\ldots,l$ и $j = 1,\ldots,k$.

Легко убедиться, что ρ удовлетворяет всем аксиомам неархимедовой метрики.

Предложение 7. *Во вторичной неархимедовой метрике на U каждый шар является F-подмножеством в U, порожденным подмножеством, открытым в исходной метрике.*

9. **Топология и метрика на совокупности F-подмножеств конечного ранга.** Топология и метрика на носителе U правильной А-системы (U,F) индуцируют топологию (соответственно, метрику) на совокупности $\widetilde{L} = \widetilde{l}(U,F)$ F-подмножеств $V \subset U$ конечного ранга. Приведем их конструкцию для случая свободной А-системы.

9.1. *Топология на $\widetilde{L}$, индуцированная топологией на U.* Пусть $V \subset U$ – произвольное F-подмножество с базисом $Y = \{y_1,\ldots,y_k\}$. Обозначим через $M(V_{y_1},\ldots,V_{y_k})$, где V_{y_i} – окрестность точки y_i, совокупность F-подмножеств в U, порожденных всевозможными подмножествами $Z = \{z_1,\ldots,z_k\}$, где $z_i \in V_{y_i}$, $i = 1,\ldots,k$. По определению, базис окрестностей подмножества V состоит из множеств $M(V_{y_1},\ldots,V_{y_k}) \subset \widetilde{L}$, где V_{y_i} для каждого i пробегает базис окрестностей точки y_i.

В п. 8 хаусдорфова топология на базе $X \subset U$ продолжена до топологии на U. Тем самым, топология на X индуцирует и топологию на $\widetilde{L}$.

Теорема 8. *Топология на $\widetilde{L}$., индуцированная хаусдорфовой топологией на X, также хаусдорфова и, если база $X \subset U$ не содержит изолированных точек, то в этой топологии подмножество $L \subset \widetilde{L}$ плоских подмножеств открыто и всюду плотно.*

9.2. *Метрика на $\widetilde{L}$, индуцированная метрикой ρ на U.* Для подмножеств $U_1 = U[x_1, \ldots, x_n]$ и $U_2 = [y_1, \ldots, y_n]$ одинакового ранга полагаем:

$$\rho(U_1, U_2) = \min_{\sigma}\Big(\max(\rho(x_1, y_{\sigma(1)}), \ldots, \rho(x_n, y_{\sigma(n)}))\Big),$$

где минимум берется по всем перестановкам σ индексов $1, \ldots, n$.

Если ρ – архимедова или неархимедова метрика на U, то эта формула задает соответственно архимедову или неархимедову метрику на совокупности $\widetilde{L}_n$ F-подмножеств в U одного и того же фиксированного ранга n. Эту метрику можно затем продолжить до соответственно архимедовой или неархимедовой метрики на всем $\widetilde{L}$ так, что $\rho(U_1, U_2) \geqslant 1$, если $r(U_1) \neq r(U_2)$.

Список литературы

[1] Курош А.. Лекции по общей алгебре. М., "Наука", 1973, 399с
[2] Кон П.. Универсальная алгебра. М., "Мир", 1968, 351с
[3] O. Borüvka. Grundlagen der gruppoid-und gruppenteoria. Berlin, 1966, 198c.
[4] Биркгоф Г. Теория решеток. М.,"Наука", 1984, 568с

Научно исследовательский институт системных исследований Российской Академии Наук. Москва.