Геометрические и топологические структуры на группоидах

Содержание

[0]Поддержано РФФИ, грант 01-01-00754.

Введение

Группоидом называется множество с одной бинарной операцией [1][2]. Это понятие используется, обычно, для наложения на эту операцию дополнительных условий. Например, можно превратить группоид в группу или полугруппу [3]. Однако, как мы покажем, именно в тех случаях, когда бинарная операция не связана никакими условиями, или эти условия минимальны, в группоиде содержатся интересные геометрические структуры.

Вводится понятие правильного группоида. Группоид называется правильным, если (i) любой его элемент x допускает не более одного разложения $x = yz$, с точностью до порядка сомножителей, где хотя бы один сомножитель отличен от x, и (ii) неразложимые элементы порождают весь группоид.

Класс правильных группоидов включает группоиды, свободно порожденные множеством X (свободные группоиды), группоиды с тождеством $xy = yx$ (свободные коммутативные группоиды) и группоиды с тождеством $xx = x$ (свободные идемпотентные группоиды).

Ассоциативные группоиды не являются правильными.

Статья посвящена трем связанным между собой темам: решеткам подгруппоидов правильного группоида, свободным топологическим группоидам и свободным идемпотентным ультраметрическим группоидам.

1. С каждым правильным группоидом G мы связываем решетку L его подгруппоидов конечного ранга, т. е. с конечным числом образующих. В этой решетке произведение $A \wedge B$ подгруппоидов A и B определено, как их пересечение $A \cap B$, а сумма произведение $A \vee B$— как наименьший подгруппоид, содержащий их объединение $A \cup B$. Эта решетка допускает простое описание, однако она "не геометрична", поскольку не является модулярной или полумодулярной [4]. Мы выделяем в L подмножество плоских подгруппоидов $\mathcal{L}$ со структурой полумодулярной решетки. Подгруппоид A конечного ранга r называется плоским, если в G не существует подгруппоида ранга $r_1 \leqslant r$, строго содержащего A.

Доказывается, что пересечение плоских подгруппоидов также является плоским подгруппоидом. Поэтому, с каждым подмножеством V правильного подгруппоида G можно связать его плоскую оболочку $\overline{V}$ — наименьший плоский подгруппоид, содеожащий V.

Произведение $A \wedge B$ плоских подгруппоидов A и B определяется как их пересечение. А их сумма $A \vee B$ — как наименьший плоский подгруппоид, содержащий A и B (плоская оболочка их объединения $\overline{A \cup B}$). Множество $\mathcal{L}$ плоских подгруппоидов с операциями произведения и суммы является полумодулярной решеткой.

Плоские подгруппоиды естественно трактовать как аналоги плоскостей различных размерностей. Таким образом, на правильном группоиде возникает своеобразная геометрия. Ее существенная особенность: на каждой n-плоскости выделена однозначно определенная база из $n + 1$ точки — множество образующих плоского подгруппоида. Оказывается, что база пересечения (произведения) и суммы двух плоскостей содержится в объединении баз этих плоскостей. См. пример в п. 3.6.

2. В § 4 рассматриваются свободные группоиды $G[X]$, порожденные хаусдорфовым пространством X. Топология продолжается с X до хаусдорфовой топологии в $G[X]$ такой, что операция умножения непрерывна. Далее, топология в группоиде $G[X]$ задает хаусдорфову топологию на решетке L его подгруппоидов конечного ранга. Мы доказываем, что подмножество плоских подгруппоидов в этой топологии открыто и всюду плотно.

3. В § 5 рассматриваются свободные идемпотентные группоиды $G[X]$, порожденные метрическим или ультраметрическим пространством X. Метрика продолжается с X в $G[X]$ так, что операция умножения становится непрерывной. Показано, что все шары в построенной метрике на $G[X]$ являются подгруппоидами. Далее, метрика в группоиде $G[X]$ задает на решетке L его подгруппоидов конечного ранга метрику, относительно которой подмножество плоских подгруппоидов всюду плотно.

1. Исходные определения

Группоидом называется множество G с одной бинарной операцией $G \times G \to G$ (произведение xy элементов x, y из G). Понятия подгруппоида, гомоморфизма и изоморфизма группоидов определяются обычным образом. По определению, пустое подмножество группоида считается подгруппоидом.

1.1. **Подгруппоиды.** Очевидно, пересечение любого множества подгруппоидов также является подгруппоидом (возможно — пустым). Поэтому совокупность подгруппоидов группоида G наделена структурой решетки по отношению вложения. В этой решетке произведением (конъюнкцией, пересечением) $G_1 \wedge G_2$

подгруппоидов G_1 и G_2 является теоретико- множественное пересечение $G_1 \cap G_2$, а суммой (дизъюнкцией) $G_1 \vee G_2$ подгруппоидов G_1 и G_2 является теоретико- множественное пересечение всех подгруппоидов, содержащих как G_1, так и G_2, т. е. содержащих их теоретико-множественное объединение $G_1 \cup G_2$.

1.2. **Порождающие и базисные подмножества.** Свяжем с каждым подмножеством X группоида G последовательность его подмножеств $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, где

$$X_1 = X; \qquad X_n = \{uv \mid u, v \in X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}\} \tag{1}$$

Очевидно, что объединение подмножеств X_n есть подгруппоид в G. Назовем его подгруппоидом, порожденным множеством X, и обозначим через $G(X)$. Назовем X порождающим подмножеством в группоиде $G(X)$.

Назовем $X \subset G$ базисным подмножеством (кратко — базой или базисом) в G, если X — порождающее подмножество в G и любое его собственное подмножество $Y \subset X$, $Y \neq X$, не является порождающим множеством. Группоид с базисным подмножеством X обозначим через $G[X]$.

В частности, можно записать определение решетки подгруппоидов через операцию порождения:

$$G_1 \wedge G_2 = G_1 \cap G_2 = G(G_1 \cap G_2); \qquad G_1 \vee G_2 = G(G_1 \cup G_2) \tag{2}$$

1.3. **Конечная порожденность.** Назовем группоид G конечно порожденным, если он обладает конечным порождающим подмножеством X, т.е. $G = G(X)$, $\#X < \infty$.

Очевидно, у конечно порожденного группоида $G(X)$ существует конечное базисное подмножество $X' \subset X$, т.е. $G(X) = G[X']$.

1.4. **Высота.** Назовем высотой элемента $y \in G(X)$ относительно порождающего множества X и обозначим через $h_X(y)$ наименьшее число n такое, что $y \in X_n$ и $y \notin X_k$ при $k < n$, где последовательность $\{X_n\}$ определена формулой (1).

Из определения следует :

1) $h_X(y) = 1$ тогда и только тогда, когда $y \in X$,
2) если $h_X(y) = n > 1$, то y представим в виде $y = uv$, где $\max\{h_X(u), h_X(v)\} = n - 1$.

1.5. **Длина.** Определим длину $l_X(y)$ элемента $y \in G(X)$ относительно порождающего множества X индукцией по высоте $h_X(y)$. Если $h_X(y) = 1$, т.е. $y \in X$, то полагаем $l_X(y) = 1$. Если $h_X(y) = n > 1$, то полагаем

$$l_X(y) = \min\{l_X(u) + l_X(v) \mid uv = y;\ h_X(u) < n,\ h_X(v) < n\} \qquad (3)$$

Предложение 1.1. *$h_X(y) \leqslant l_X(y)$ для всех $y \in G(X)$.*

Доказательство. Индукция по $h_X(y)$. Если $h_X(y) = 1$ или 2, то $l_X(y) = h_X(y)$. Пусть утверждение доказано для $h_X(y) < n$, и пусть $h_X(y) = n$. Тогда $y = uv$, где $\max\{h_X(u), h_X(v)\} = n - 1$. Для определенности, $h_X(u) = n - 1$. Тогда по предположению индукции $l_X(u) \geqslant h_X(u)$, а потому $l_X(u) \geqslant n - 1$. Следовательно, $l_X(u) + l_X(v) \geqslant n$ для любого представления $y = uv$, а потому, согласно (3) длина $l_X(y) \geqslant h_X(y)$. □

2. Правильные группоиды

Здесь вводится и изучается семейство правильных группоидов, включающее как частный случай свободные, свободные идемпотентные и свободные коммутативные группоиды.

2.1. **Свободные группоиды.** Группоид G, порожденный подмножеством X, называется свободным над X, если он удовлетворяет следующему условию универсальности:

> любое отображение $X \to G'$, где G' — произвольный группоид, однозначно продолжается до гомоморфизма группоидов $G \to G'$.

Это свойство универсальности эквивалентно следующим двум условиям для элементов группоида G:

1) равенство $x_1y_1 = x_2y_2$ выполняется в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$,
2) элементы $x \in X$ не представимы в виде произведения $x = x_1y_1$.

Очевидно, X является базой группоида G, т.е. $G = G[X]$.

Предложение 2.1. *Два свободных группоида $G[X]$ и $G[Y]$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\#X = \#Y$.*

Доказательство. Если существует изоморфизм $G[X] \to G[Y]$, то при этом изоморфизме неразложимые элементы переходят в неразложимые, Таким образом, определена биекция $X \to Y$. Обратно, если $\#X = \#Y$, то существует биекция $\sigma : X \to Y$. Индукцией по высоте элементов ее можно продолжить до изоморфизма $G[X] \to G[Y]$. Именно, если σ уже определена на множестве элементов $x \in G[X]$ высоты, меньшей n, и $h(x) = n$, то представим x в виде $x = uv$, где $h(u)$, $h(v) < n$, и положим $\sigma(x) = \sigma(u)\,\sigma(v)$. Из построения очевидно, что σ — изоморфизм группоидов $G[X]$ и $G[Y]$. $\square$

Предложение 2.2. *Подгруппоиды свободных группоидов сами являются свободными.*

В самом деле, очевидно, что в каждом подгруппоиде G' свободного группоида G выполняется условие 1). Справедливость условия 2) будет установлена позднее, сразу для более широкого семейства группоидов (см. предложение 2.5).

Предложение 2.3. *Любой свободный группоид содержит подгруппоид со счетной базой, а значит, и подгруппоид с конечной базой.*

Доказательство. Рассмотрим в свободном группоиде G, порожденном одним элементом x, последовательность элементов $\{x_n\}$, где $x_1 = xx$, $x_n = x_{n-1}x$ при $n > 1$. Она образует базу в порожденном ею подгруппоиде. $\square$

Добавление. Примеры группоидов, удовлетворяющих только условию 1).

Пример 1. Группоид, порожденный элементами x, y и z, с соотношениями

$$xy = z, \quad yz = x, \quad zx = y.$$

Элементы x и y образуют базу группоида G, но они разложимы.

Пример 2. Группоид G, порожденный элементами
$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$,
с соотношениями

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 0)\,(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 1).$$

У этого группоида не существует базисного множества, и все его элементы разложимы.

2.2. **Свободные идемпотентные и свободные коммутативные группоиды.**

Определение. Назовем группоид G, порожденный подмножеством X, свободным идемпотентным над X, если

I.1) $xx = x$ для любого $x \in G$

I.2) равенство $x_1y_1 = x_2y_2$, где $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$ выполняется в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, I.3) элементы $x \in X$ не представимы в виде произведений $x = yz$, $y \neq z$.

В частности, если $\#X = 1$, т.е. $X = \{x\}$, то $G(X) = \{x\}$.

Приведем пример группоида G из трех элементов x, y, z, удовлетворяющего условиям I.1),I.2), но не удовлетворяющего условию I.3).

Пример. Операция умножения в G задается равенствами

$$xx = x, \qquad yy = y, \qquad zz = z,$$
$$xy = yx = z, \qquad zx = xz = y, \qquad yz = zy = x.$$

Элементы x и y образуют базис в G, но они разложимы в произведения.

Отметим, что операция умножения в G коммутативна, но не ассоциативна.

Определение. Назовем группоид G, порожденный подмножеством X, свободным коммутативным над X, если

C.1) $xy = yx$ для любых $x, y \in G$

C.2) равенство $x_1y_1 = x_2y_2$ выполняется в том и только том случае, когда либо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, либо $x_1 = y_2$, $y_1 = x_2$,

C.3) элементы $x \in X$ не представимы в виде произведения $x = yz$.

Предложения 2.1 и 2.2 и их доказательства сохраняют силу для свободных идемпотентных и свободных коммутативных группоидов. Предложение 2.3 в коммутативном случае верно при любом базисе X, а в идемпотентном — только при $\#X > 1$.

2.3. **Свободно порожденные группоиды.**

Определение. Назовем группоид G свободно порожденным подгруппоидами G_1, G_2, если

F.1) $G_1 \cap G_2 = \emptyset$,

F.2) объединение $G_1 \cup G_2$ является порождающим множеством в G

F.3) равенство $x_1y_1 = x_2y_2$, где x_1, y_1 не принадлежат одновременно G_1 или G_2 выполняется только при $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Обозначим такой группоид G через $F(G_1, G_2)$.

Из определения непосредственно следует:

a) если $G_1 \cong G_1'$, $G_2 \cong G_2'$, то $F(G_1, G_2) \cong F(G_1', G_2')$.

b) если G_1, G_1 — группоиды с базами X_1, X_2, то $X_1 \cup X_2$ является базой группоида $F(G_1, G_2)$.

c) если G_1, G_1 — свободные группоиды над X_1 и X_2, соответственно, то $F(G_1, G_2)$ — свободный группоид над $X_1 \cup X_2$.

Аналогично определяются свободно - идемпотентно порожденные группоиды и свободно - коммутативно порожденные группоиды (подробные определения мы опускаем).

Кроме операций свободного порождения группоида из пары группоидов можно рассмотреть операцию прямого произведения группоидов:

$G_1 \times G_2 = \{(x, y) | x \in G_1,\ y \in G_2\}$;

$(x, y)(p, q) = (xp, yq)$.

В общем случае базис прямого произведения не выражается через базис сомножителей. Но если группоиды идемпотентные и-или содержат правую и-или левую единицы, то базис прямого произведения группоидов является прямым произведением базисов сомножителей: $G[X] \times G[Y] = G[X \times Y]$. Это следует из того. что любой элемент (xp, y) в идемпотентном случае можно получить в форме $(xp, y) = (x, y)(p, y)$ или $(xp, y) = (x, y)(p, 1_R) = (x, 1_L)(p, y))$.

2.4. **Правильные группоиды.**

Определение. Скажем, что группоид G удовлетворяет условию единственности разложения, если для каждого $x \in G$ имеется не более одного представления, с точностью до порядка сомножителей, в виде произведения $x = yz$, где хотя бы один сомножитель отличен от x. Элементы x, не представимые в таком виде, назовем *неразложимыми.*

Согласно определению, если $x = xx$, и для x не существует другого представления в виде произведения, то элемент x считается неразложимым.

Замечание. Ассоциативные группоиды не удовлетворяют условию единственности.

Предложение 2.4. *Если группоид G удовлетворяет условию единственности разложения, то*

1) *оно выполняется для любого подгруппоида в G,*
2) *любое порождающее множество группоида G содержит все его неразложимые элементы.*

Доказательство следует непосредственно из определения.

Определение. Назовем группоид G *правильным,* если он удовлетворяет условию единственности разложения и его база совпадает с множеством неразложимых элементов.

Подчеркнем, что в правильном группоиде G подмножество X неразложимых элементов является единственной базой (см. предложение 2.4).

Примерами правильных группоидов являются любые свободные, свободные идемпотентные и свободные коммутативные группоиды. Кроме того, если группоид G свободно (свободно - идемпотентно, свободно - коммутативно) порожден правильными группоидами G_1 и G_2, то он также является правильным.

Предложение 2.5. *Любой подгруппоид правильного группоида является правильным.*

Доказательство. Пусть G — правильный группоид, X — его база,

$X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность, определенная в п. 1.2. Определим для произвольного подгруппоида $G' \subset G$ последовательность подмножеств

$Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$. Полагаем $Y_1 = X_1 \cap G'$.

Если подмножества $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ уже определены, то определим Y_n как подмножество элементов из $X_n \cap G'$, не принадлежащих подгруппоиду

$G(Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-1}) \subset G'$. По построению, множество $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ порождает G' и элементы этого множества являются неразложимыми в G'. □

Определение. Назовем *рангом* правильного группоида G и обозначим $r(G)$ мощность подмножества X его неразложимых элементов.

Длину и высоту элементов $x \in G$ относительно X будем обозначать, соответственно, через $l(x)$ и $h(x)$.

Из определения $h(x)$ и $l(x)$ вытекает

Предложение 2.6. *Если $x = uv$, где $h(u)$, $h(v) < h(x)$, то*

$$h(x) = \max\{h(u),\, h(v)\} + 1; \tag{4}$$

$$l(x) = l(u) + l(v). \tag{5}$$

2.5. **Отношение подчиненности.** Введем частичную упорядоченность на множестве элементов правильного подгруппоида G. Пусть $x, y \in G$. Скажем, что y непосредственно подчинен x, если $y \neq x$ и $x = yz$ или $x = zy$. Если y и x не перестановочны, то снабдим элемент y меткой "левый"в случае разложения $x = yz$ и меткой "правый"в случае разложения $x = zy$.

Таким образом, для каждого элемента $x \in G$ существует не более двух непосредственно подчиненных ему элементов.

Определение. Будем говорить, что y подчинен x, и писать $y \leqslant x$, если либо $y = x$, либо существует конечная последовательность $x = x_1, \ldots, x_n = y$, в которой каждый следующий элемент непосредственно подчинен предыдущему.

Согласно этому определению, если G_1 – подгруппоид правильного группоида G, $x, y \in G_1$ и y подчинен x в G_1, то y подчинен x в G.

Из предложения 2.6 следует

Предложение 2.7. *Если $y \leqslant x$, $y \neq x$, то*

$$h(y) < h(x), \quad l(y) < l(x).$$

Следствие. *Для каждого $x \in G$ подмножество элементов, подчиненных x, конечно.*

Заметим, что отношение подчиненности не инвариантно относительно операции умножения в группоиде. Например, рассмотрим в свободном группоиде $G[a, b, c]$ элементы a, ab, ac, $(ab)c$. На них имеется следующая подчиненность: $a < ab$; $a < ac$; $ab < (ab)c$, но нет подчиненности $ac < (ab)c$. Таким образом по отношению подчиненности $G[a, b, c]$ не является упорядоченным группоидом в смысле стандартного определения этого свойства.

Заметим, также, что по частичным порядкам, задаваемым высотами или длинами элементов, правильные группоиды являются упорядоченными, поскольку это свойство инвариантно относительно умножения: если $h(a) \leq h(b)$ то $h(ac) \leq h(bc)$, $h(ca) \leq h(cb)$ для каждого элемента c, и аналогично для длин.

2.6. **Подмножества X_y.** Если X — база правильного подгруппоида G, то обозначим для каждого $x \in G$:

$$X_y := \{x \in X \mid x \leqslant y\} \tag{6}$$

По определению, X_y совпадает с наименьшим подмножеством Z в X таким, что $y \in G[Z]$. Назовем $X_y \subset X$ порождающим подбазисом элемента $y \in G$.

Из определения следует

Предложение 2.8. *Если $y = uv$, то $X_y = X_u \cup X_v$.*

Предложение 2.9. *Пусть $G[X]$ — подгруппоид правильного группоида G, $y \in G[X]$ и $x \in X_y$, $x \neq y$. Тогда $l(y) > l(x)$.*

Утверждение следует из предложения 2.7, поскольку $x \leqslant y$.

Следствие. *Пусть $G[X]$ и $G[Y]$ суть подгруппоиды правильного группоида. Тогда, если $x \in X \cap G[Y]$ и $y \in Y \cap G[X]$, $x \neq y$, то не может быть одновременно $x \in X_y$ и $y \in Y_x$.*

В самом деле, в противном случае было бы $l(x) > l(y)$ и $l(y) > l(x)$.

Предложение 2.10. *Если $G[X]$ подгруппоид правильного группоида, то для любого $y \in G[X]$ имеем*

$$l(y) \geqslant \sum_{x \in X_y} l(x). \tag{7}$$

Доказательство. Индукция по высоте $h_X(y)$. При $h_X(y) = 1$, т.е. при $y \in X$, утверждение очевидно. Пусть $h_X(y) = n > 1$. Тогда $y = uv$, где $u, v \in G[X]$, $h_X(u), h_X(v) < n$. По предположению индукции, $l(u) \geqslant \sum_{x \in X_u} l(x)$, $l(v) \geqslant \sum_{x \in X_v} l(x)$. Отсюда, так как $l(y) = l(u) + l(v)$ и $X_y = X_u \cup X_v$, следует неравенство (7). □

Следствие 1. $l(y) \geqslant \# X_y$.

Следствие 2. *Если $\# X_y > 1$ то $l(y) > l(x)$ для любого $x \in X_y$.*

Предложение 2.11. *Если $G[X]$ — правильный группоид с базой X, то для любых подмножеств X', X'' множества X имеем:*

$$G[X'] \cap G[X''] = G[X' \cap X''].$$

В самом деле, очевидно, $G[X' \cap X''] \subset G[X'] \cap G[X'']$. Обратно, если $y \in G[X'] \cap G[X'']$, то $X_y \subset X'$ и $X_y \subset X''$. Следовательно, $y \in G[X' \cap X'']$. □

2.7. **Полные и сильные подгруппоиды.**

Определение. Назовем подгруппоид $G[Y]$ правильного группоида $G[X]$ полным, если $G[Y] \not\subset G[X']$ для любого собственного подмножества $X' \subset X$. Назовем $G[Y]$ сильно полным в $G[X]$, если $X_a \cap X_b \neq \emptyset$ хотя бы для двух элементов $a, b \in Y$, $a \neq b$.

Предложение 2.12. *Подгруппоид $G[Y]$ правильного подгруппоида $G[X]$ является полным если и только если $X = \bigcup_{y \in Y} X_y$.*

Это следует непосредственно из определения порождающих подбазисов X_y.

Предложение 2.13. *Если $G[Y]$ — полный подгруппоид правильного группоида $G[X]$, и $r(G[X]) < r(G[Y])$, то $G[Y]$ — сильно полный.*

В самом деле, так как по условию $\#X < \#Y$, то хотя бы два из подмножеств X_y имеют непустое пересечение.

Предложение 2.14. *Если $G[X]$ — подгруппоид конечного ранга правильного группоида, и $G[Y] \subset G[X]$ — полный подгруппоид, то*

$$\sum_{y\in Y} l(y) \geqslant \sum_{x\in X} l(x). \tag{8}$$

Если при этом $G[Y]$ — сильно полный подгруппоид в $G[X]$, то неравенство (8) является строгим.

Доказательство. Из предложения 2.10 следует $l(y) \geqslant \sum_{x\in X_y} l(x)$ для любого $y \in Y$. Значит,

$$\sum_{y\in Y} l(y) \geqslant \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X_y} l(x).$$

Так как в силу полноты $X = \cup_{y\in Y} X_y$, то

$$\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X_y} l(x) \geqslant \sum_{x\in X} l(x),$$

причем в случае сильно полного подгруппоиду последнее неравенство является строгим. □

2.8. **Условие обрыва цепочек подгруппоидов.** Пусть

$$G[X_1] \subset \ldots \subset G[X_n] \subset \ldots \tag{9}$$

— строго возрастающая цепочка подгруппоидов конечного ранга в правильном группоиде.

Предложение 2.15. *Если для каждого n группоид $G[X_n]$ является сильно полным в $G[X_{n+1}]$, то цепочка* (9) *обрывается на конечном шагу.*

Доказательство. Согласно предложению 2.14

$$\sum_{x\in X_n} l(x) > \sum_{x\in X_{n+1}} l(x), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Таким образом, сумма длин элементов $x \in X_n$ строго убывает при возрастании n. Отсюда следует утверждение. □

Предложение 2.16. *Если для каждого n группоид $G[X_n]$ является полным в $G[X_{n+1}]$, и $r(X_{n+1}) \leqslant r(X_n)$, то цепочка* (9) *обрывается на конечном шагу.*

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (10). Если $G[X_n]$ является сильно полным в $G[X_{n+1}]$, то (10) следует из предложения 2.14. Если $G[X_n]$ не является сильно полным в $G[X_{n+1}]$, то в силу предложения 2.13 выполняется $r(G[X_{n+1}]) = r(G[X_n])$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\#Y_x = 1$ для всех $x \in X_n$, где $Y = Y_{n+1}$; иными словами $Y_x = \{y_x\}$. При этом $l(x) \geqslant l(y_x)$. Случай, когда $x = y_x$ для всех $x \in X_n$, исключается, так как в этом случае было бы $G[X_n] = G[X_{n+1}]$. Значит, $l(x) > l(y_x)$ хотя бы для одного $x \in X_n$, а потому $\sum_{x\in X_n} l(x) > \sum_{x\in X_{n+1}} l(x)$. □

Следствие. *Любая возрастающая (не обязательно строго) цепочка подгруппоидов правильного группоида, в которой ранги не возрастают, стабилизируется на конечном шаге.*

В противном случае существовала бы строго возрастающая цепочка 9 , удовлетворяющая условиям предложения 2.16. Действительно. Если $G_n = G[X_n]$ не полон в $G_{n+1} = G[X_{n+1}]$, то заменим G_{n+1} на $G'_{n+1} = G[X'_{n+1}]$, где $X'_{n+1} = \cup_{x\in X_n}(X_{n+1})_x$. При такой замене не возможно равенство $G_n = G'_{n+1}$ поскольку тогда (в силу единственности базиса у каждого подгруппоида правильного группоида) $X_n = X'_{n+1}$, $X'_{n+1} \subset X_{n+1}$, и следовательно, $\#X_n < \#X_{n+1}$, что противоречит условию невозрастания рангов. Следовательно, мы можем построить цепочку G'_n, $n = 1, ...,$ где $G'_n \subset G_n$, и каждый член является сильным подгруппоидом в последующем, которая стабилизируется вместе с исходной цепочкой.

2.9. **Схемы разложения.** Свяжем с каждым элементом x правильного группоида G конечный направленный граф $S(x)$ типа дерева, который назовем схемой разложения x (или, короче, просто схемой x). Его вершину, в которую ребра не входят, назовем корнем, а вершины, из которых ребра не выходят, — листьями.

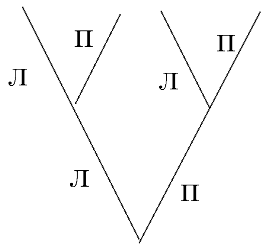
Определим $S(x)$ индукцией по высоте $h(x)$ относительно базы X группоида G. Если $h(x) = 1$, т.е. $x \in X$, то по определению, $S(x)$ состоит из одной точки, являющейся одновременно и корнем и листом. Если $h(x) = n > 1$, то представим x в виде произведения $x = uv$, где $h(u)$, $h(v) < n$. Тогда по определению схема $S(x)$ получается из схем $S(u)$ и $S(v)$ добавлением одной вершины (корня схемы $S(x)$) и двух ребер, идущих от этого корня к корням схем $S(u)$ и $S(v)$.

Если элементы u и v не перестановочны, то эти ребра снабжаются метками "левый"и "правый"(л. и п.).

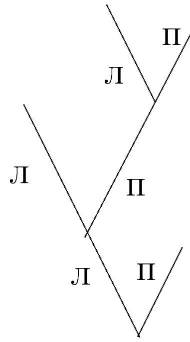
В терминах схем высота $h(x)$ элемента x равна максимальному числу ярусов схемы $S(x)$, а длина $l(x)$ — числу листьев.

Пример. На рисунках 1, 2 и 3 изображены, соответственно, схемы элементов $(x_1x_2)(x_3x_4)$, $(x_1(x_2x_3))x_4$, $x_1((x_2x_3)x_4)$, где x_i — произвольные, не обязательно попарно различные, элементы базы свободного группоида.

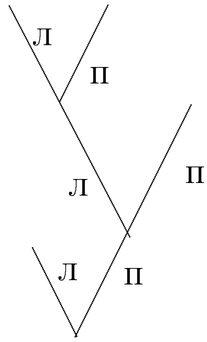
Примечание. Определение схемы сохраняет смысл при замене базы X любым порождающим множеством X'. Разумеется, соответствующие схемы зависят от выбора X'.



Ris. 1



Ris. 2



Ris. 3

2.10. **Пересечения и объединения подгруппоидов.**

Теорема 1. *Пересечение подгруппоидов* $G[X]$ *и* $G[Y]$ *правильного группоида имеет вид*

$$G[X] \cap G[Y] = G(X' \cup Y'), \quad \text{где} \quad X' = X \cap G[Y], \quad Y' = Y \cap G[X]. \tag{11}$$

В частности, если $X' = Y' = \emptyset$, *то* $G[X] \cap G[Y] = \emptyset$.

Доказательство. Обозначим: $A = G[X] \cap G[Y]$; $B = G(X' \cup Y')$. Очевидно, $B \subset A$. Предположим, что $A \neq B$. Тогда для каждого $u \in A \setminus B$ имеем $l_X(u) > 1$, $l_Y(u) > 1$. Следовательно, $u = ab = cd$, $a, b \in G[X]$, $c, d \in G[Y]$, причем $l_X(a), l_X(b) < l_X(u)$, $l_Y(c), l_Y(d) < l_Y(u)$. Выберем элемент u наименьшей длины $l_X(u)$. В силу условия правильности, для него либо $a = c$, $b = d$, либо $a = d$, $b = c$. В любом случае из определения A следует, что $a, b \in A$. Из минимальности $l_X(u)$ следует, что $a, b \in B$. Но тогда $u \in B$ вопреки определению элемента u. Значит, $A = B$. □

Напомним, что объединением или суммой двух подгруппоидов G_1 и G_2 группоида G называется наименьший подгруппоид, содержащий G_1 и G_2. Он обозначается через $G_1 \vee G_2$.

Из определения следует, что $G[X] \vee G[Y] = G(X \cup Y)$.

Пусть $G_1 = G[X]$, $G_2 = G[Y]$ — подгруппоиды конечного ранга правильного группоида, и пусть $G_1 \vee G_2 = G[Z]$; тогда $Z \subset X \cup Y$.

Теорема 2. *Для любых подмножеств* $X' \subset X \cap G[Y]$ *и* $Y' \subset Y \cap G[X]$

$$Z \subset (X \setminus X') \cup (Y \setminus Y') \cup (X' \cap Y'). \tag{12}$$

Следовательно,

$$G(X \cup Y) = G((X \setminus X') \cup (Y \setminus Y') \cup (X' \cap Y')). \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим: $X \setminus X' = X^*$, $Y' \setminus X' = Q$. Вначале докажем, что

$$y \in G(X^* \cup (Y \setminus \{y\})) \text{ для любого } y \in Q. \tag{14}$$

Пусть $y \in Q$ и $x \in X_y \cap X'$. Так как $x \neq y$, то по следствию предложения 2.9 $y \notin Y_x$, т.е. $x \in G[Y \setminus \{y\}]$. Следовательно, $X_y \cap X' \subset G[Y \setminus \{y\}]$. Отсюда, поскольку $X_y \subset (X_y \cap X') \cup X^*$, получаем

$$X_y \subset G(X^* \cup (Y \setminus \{y\})) \text{ для любого } y \in Q.$$

Значит, справедливо (14). Из доказанной формулы (14) следует, что $G[Y] \subset G(X^* \cup (Y \setminus \{y\}))$ для любого $y \in Q$. Но тогда, так как $X' \subset G[Y]$, имеем также $G[X] \subset G(X^* \cup (Y \setminus \{y\}))$. Значит,

$$G(X \cup Y) = G(X^* \cup (Y \setminus \{y\})) \text{ для любого } y \in Q,$$

откуда $Z \subset X^* \cup (Y \setminus \{y\})$ для любого $y \in Q$, а потому $Z \subset X^* \cup (Y \setminus Q)$. Остается заметить, что

$$X^* \cup (Y \setminus Q) = (X \setminus X') \cup (Y \setminus Y') \cup (X' \cap Y').$$

Теорема доказана. □

Следствие.

$$\begin{aligned} G(X \cup Y) &= G((X \setminus X') \cup Y) = G(X \cup (Y \setminus Y')) \\ &= G((X \setminus X') \cup (Y \setminus Y') \cup (X \cap Y)), \end{aligned}$$

где $X' = X \cap G[Y]$, $Y' = Y \cap G[X]$.

Замечание. Вообще говоря, базис подгруппоида $G_1 \wedge G_2$ не содержится в базисе подгруппоида $G_1 \vee G_2$. Например, пусть $G_1 = G[x, y]$, $G_2 = G[xy, z]$ — подгруппоиды свободного группоида $G[x, y, z]$. В этом случае $G_1 \wedge G_2 = G[xy]$, $G_1 \vee G_2 = G[x, y, z]$.

Предложение 2.17. *Если* $A = G[X]$, $B = G[Y]$ *— подгруппоиды конечного ранга правильного группоида* G*, не содержащиеся один в другом, то*

$$r(A \wedge B) \leqslant r(A) + r(B) - 2 \tag{15}$$

Если G *— идемпотентный группоид, то справедливо более сильное неравенство:*

$$r(A \wedge B) \leqslant r(A) + r(B) - 3 \tag{16}$$

Существуют подгруппоиды произвольных рангов, для которых неравенства (15) *и* (16) *превращаются в равенства.*

Доказательство. Пусть Z — базис подгруппоида $A \wedge B$. По теореме 1, $Z \subset X \cup Y$. Значит, если $\#Z \geqslant (\#X + \#Y - 1)$, то либо $Z \supset X$, либо $Z \supset Y$, т.е., вопреки предположению, один из подгруппоидов A, B содержится в другом. Противоречие доказывает, что $\#Z \leqslant (\#X + \#Y - 2)$, т.е. выполняется (15).

Докажем, что если G — идемпотентный группоид, то $\#Z \neq (\#X + \#Y - 2)$. В самом деле, если $\#Z = (\#X + \#Y - 2)$, то, в обозначениях теоремы 1, $Z = X' \cup Y'$, $X = X' \cup \{a\}$, $Y = Y' \cup \{b\}$, где $a, b \notin A \cap B$.

Пусть $x \in X$. Так как Z — базис, то Y_x не содержится в Y', а потому $b \in Y_x$. Случай $Y_x = \{b\}$ невозможен, так как, в силу условия идемпотентности, тогда было бы $x = b$. Значит, Y_x содержит, кроме b, хотя бы один элемент $y_x \in Y'$. Но тогда, в силу предложения 2.10, $l(x) > l(y_x)$. Аналогично, для y_x существует элемент $x' \in X'$, для которого $l(y_x) > l(x')$. Итак, для каждого $x \in X'$ существует $x' \in X'$, для которого $l(x) > l(x')$. Это невозможно ввиду конечности X'. Неравенство (16) доказано. □

Ниже строятся примеры подгруппоидов произвольного ранга, для которых неравенства (15) и (16) превращаются в равенства.

Пример 1. Пусть $G[x, y]$ — свободный группоид,
$X = \{x_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $Y = \{y_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где
$x_1 = x$, $y_1 = y$, $x_{k+1} = x_k x$, $y_{k+1} = y_k y$.

Множества X и Y являются базисами в порожденных ими подгруппоидах A и B. Базисом подгруппоида $A \cap B$ является множество $Z = \{x_2, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m\}$. Таким образом, $r(A) = m$, $r(B) = n$ и $r(A \cap B) = m + n - 2$.

Пример 2. Пусть $G[x, y, z]$ — свободный идемпотентный группоид,
$X = \{x, y, u_1 \ldots, u_{n-2}\}$, $Y = \{v_1, \ldots, v_{m-1},\ z\}$,

где $u_1 = (xy)z$, $u_{i+1} = u_i z$ для $i = 1, \ldots, n-2$; $v_1 = xy$, $v_{i+1} = v_i y$ для $i = 1, \ldots, m-1$. Множества X и Y являются базисами в порожденных ими подгруппоидах A и B. Базисом подгруппоида $A \cap B$ является множество $Z = \{u_1, \ldots, u_{n-2},\ v_1, \ldots, v_{m-1}\}$. Таким образом, $r(A) = n$, $r(B) = m$ и $r(A \cap B) = m + n - 3$.

Замечание. Согласно предложению 2.3, существуют подгруппоиды A и B произвольных рангов m и n такие, что $A \subset B$.

3. Геометрические структуры на правильных группоидах

3.1. **Решетки подгруппоидов правильных группоидов.** Обозначим через $L = L(G)$ совокупность подгруппоидов конечного ранга правильного группоида G. Множество L образует решетку относительно операций суммы (объединения) $\vee$ и произведения (пересечения) $\wedge$, введенных в п. 2.10. Согласно п. 2.10, если $G_1 = G[X]$, $G_2 = G[Y]$, то $G_1 \vee G_2 = G(X \cup Y)$, $G_1 \wedge G_2 = G[Z]$, где $Z \subset (X \cap G[Y]) \cup (Y \cap G[X])$. Таким образом, операции суммы и произведения над подгруппоидами G_1 и G_2 сводятся к операциям над их базами.

Теорема 3. *Ранги подгруппоидов G_1, G_2, $G_1 \wedge G_2$ и $G_1 \vee G_2$ связаны соотношением*

$$r(G_1 \wedge G_2) + r(G_1 \vee G_2) \leqslant r(G_1) + r(G_2). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $G_1 = G[X]$, $G_2 = G[Y]$, $G_1 \wedge G_2 = G[Z]$. Поскольку $Z \subset (X \cap G[Y]) \cup (Y \cap G[X])$, представим Z в виде дизъюнктного объединения $Z = X' \cup Y'$, где $X' \subset X \cap G[Y]$ и $Y' \subset Y \cap G[X]$. Тогда на основании теоремы 2 имеем:

$$G_1 \vee G_2 = G(X \cup Y) = G((X \setminus X') \cup (Y \setminus Y')).$$

Отсюда следует, что

$$r(G_1 \vee G_2) \leqslant \#[(X \setminus X') \cup (Y \setminus Y')].$$

Так как

$$\#[(X \setminus X') \cup (Y \setminus Y')] \leqslant (\#X) + (\#Y) - (\#(X' \cup Y')),$$

то $r(G_1 \vee G_2) \leqslant r(G_1) + r(G_2) - r(G_1 \wedge G_2)$. □

Решетка L "не геометрична", поскольку не является, вообще говоря, ни модулярной, ни полумодулярной. Например, в свободном идемпотентном группоиде $G[x, y]$ одноэлементные подгруппоиды $G_1 = G[x]$ и $G_2 = G[y]$ покрывают подгруппоид $G_3 = \emptyset$. Однако, их объединение $G[x, y]$ не покрывает G_1 и G_2. Например, подгруппоид $G[x, xy]$ содержит G_1 и содержится в $G[x, y]$.

3.2. **Плоские подгруппоиды.** Введем семейство $\mathcal{L}$ подгруппоидов конечного ранга, которые, как будет установлено позднее, образуют полумодулярную решетку.

Определение. Назовем подгруппоид A конечного ранга r правильного группоида G плоским, если в G не существует подгруппоидов ранга $r_1 \leqslant r$, строго содержащих G.

Из определения следует

Предложение 3.1. *Если G_1, G_2 — плоские подгруппоиды любого правильного группоида G, и $G_1 \subset G_2$, то*

1) $r(G_1) \leqslant r(G_2)$,
2) *если* $r(G_1) = r(G_2)$, *то* $G_1 = G_2$.

Предложение 3.2. *Если $G = G[X]$ — правильный группоид конечного ранга r, то*

1) *все подгруппоиды вида $G[X']$, где $X' \subset X$, являются плоскими;*
2) *$G[X]$ — единственный плоский подгруппоид ранга r;*
3) *не существует плоских подгруппоидов ранга $r_1 > r$.*

Замечание. Плоскими подгруппоидами $G[X']$, где $X' \subset X$, не исчерпываются все плоские подгруппоиды в $G[X]$. Например, подгруппоид $G[x, yz]$ является плоским подгруппоидом свободного группоида $G[x, y, z]$.

Определение. Пусть $G[X]$ — подгруппоид конечного ранга правильного группоида G. Скажем, что подгруппоид $G[Y]$ накрывает $G[X]$, если $G[X]$ — полный строго вложенный в $G[Y]$ подгруппоид и $r(G[X]) \geqslant r(G[Y])$.

Предложение 3.3. *Подгруппоид $G[X]$ правильного группоида G является плоским в том и только том случае, когда в G не существует подгруппоида $G[Y]$, накрывающего $G[X]$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, докажем, что для неплоского подгруппоида $G[X]$ существует накрывающий подгруппоид $G[Y]$. По предположению, в G существует подгруппоид $G[Y]$ ранга $r_1 \leqslant r(G[X])$, строго содержащий $G[X]$. Пусть $Y' \subset Y$ — наименьшее подмножество такое, что $G[X] \subset G[Y']$. Тогда $G[X]$ — полный подгруппоид в $G[Y']$. Если $G[X] = G[Y']$, то $X = Y'$ и, так как $\#X \geqslant \#Y$, то $X = Y$, и тогда, вопреки предположению, $G[X] = G[Y]$. Значит, $G[X] \neq G[Y']$, т.е. $G[Y']$ накрывает $G[X]$. Предложение доказано. □

3.3. **Плоские оболочки подгруппоидов.**

Определение. Назовем приведенным рангом подгруппоида $G[X]$ и обозначим через $p(X)$, наименьшее из чисел r, для которых существует подгруппоид ранга r, содержащий $G[X]$.

Очевидно, $p(X) \leqslant r(G[X])$.

Теорема 4. *Пусть $G[X]$ — подгруппоид приведенного ранга $p(X)$ в правильном группоиде G. Тогда $G[X]$ содержится, и притом в единственном, плоском подгруппоиде $P = P(X)$ ранга $p(X)$.*

Доказательство. Из определения следует, что $G[X]$ содержится в некотором подгруппоиде $G[Y]$ ранга $p(X)$. Рассмотрим цепочку (9), удовлетворяющую условию предложения 2.16, в которой $X_1 = Y$. Все подгруппоиды этой цепочки имеют ранг $p(X)$. Согласно предложению 2.16, цепочка обрывается на конечном шагу, т.е. для последнего группоида $P = G[X_n]$ не существует накрывающего группоида. Тем самым доказано существование плоского подгруппоида $P \supset G[X]$ ранга $p(X)$. Докажем единственность.

Пусть P_1 и P_2 — плоские подгруппоиды ранга $p(X)$, содержащие на $G[X]$, и пусть $A = P_1 \cap P_2$. Тогда $A \supset G[X]$, а потому $r(A) \geqslant p(X)$. Но $r(P_1) = r(P_2) = p(X)$. Равенство $P_1 = P_2$ вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть $G_1 = G[X]$, $G_2 = G[Y]$, — плоские подгруппоиды рангов k и l, где $k \leqslant l$, и пусть n — ранг их пересечения $A = G_1 \cap G_2$. Тогда*

1) *$n \leqslant k$;*
2) *если $n = k$, то $A = G_1$, т.е. $G_1 \subset G_2$.*

В частности, если $k = l = n$, то $G_1 = G_2$.

Доказательство леммы. Рассмотрим подгруппоид $B = G(X \cup Y)$. Имеем $B \supset G_2$ и, согласно теореме 3, $r(B) \leqslant k + l - n$. Если $n > k$, то $r(B) \leqslant l$, а потому B строго содержит плоский подгруппоид G_2 ранга l, что невозможно. Значит, $n \leqslant k$. Если $n = k$, то $r(B) \leqslant l$. Так как $B \supset G_2$, и $r(G_2) = l$, это возможно лишь, когда $B = G_2$, т.е. когда $G_1 \subset G_2$. Если, дополнительно, $l = k$, то из включения $G_1 \subset G_2$ следует, что $G_1 = G_2$. Лемма доказана, а следовательно, и теорема. □

Определение. Назовем подгруппоид $P(X)$, определенный из теоремы 4 плоской оболочкой подгруппоида $G[X]$ или, по - другому, плоским подгруппоидом, натянутым на $G[X]$.

3.4. **Свойства плоских подгруппоидов.**

Теорема 5. *Любой плоский подгруппоид P содержит вместе с подгруппоидом $G[X]$ и его плоскую оболочку $P(X)$.*

Доказательство. Имеем: $r(P(X)) = p(X)$, $r(P) \geqslant p(X)$. Пусть $A = P(X) \cap P$. Тогда $A \supset G[X]$. Следовательно, $r(A) \geqslant p(X)$. По предыдущей лемме, $r(A) \leqslant r(G[X])$. Следовательно, $r(A) = p(X)$. Поскольку $r(P(X) \cap P) = r(P(X))$, то, по той же лемме, $P(X) \subset P$, что и требовалось. $\square$

Теорема 6. *Пересечение A плоских группоидов P_1, P_2 рангов $r_1 \leqslant r_2$ является плоским подгруппоидом ранга $r \leqslant r_1$. В частности, если $r = r_1$, то $A = P_1 \subset P_2$.*

Доказательство. По теореме 4 существует единственный плоский подгруппоид P, натянутый на A. По теореме 5 $P \subset P_1 \cap P_2$. Но $P \supset A$, следовательно, $P = A$. Отсюда $r = r(A) = r(P) = p(A) \leqslant r_1$. Если $r = r_1$, то, согласно последней лемме, $P = P_1$. $\square$

Теорема 7. *Если заданы подгруппоиды $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ и P_1 — плоский в P_2, а P_2 — плоский в P_3, то P_1 — плоский в P_3.*

Доказательство. Имеем: $r(P_1) \leqslant r(P_2) \leqslant r(P_3)$. Пусть P — плоский подгруппоид в P_3, натянутый на P_1. Тогда $r(P) \leqslant r(P_1)$. Согласно предыдущей теореме, $P_2 \cap P$ является плоским подгруппоидом в P_3. Так как $r(P) \leqslant r(P_2)$, то $r(P_2 \cap P) \leqslant r(P) \leqslant r(P_1)$. Отсюда и из определения плоского подгруппоида следует, что $P_2 \cap P = P_1$, а потому $r(P_2 \cap P) = r(P_1)$. Но тогда $r(P_2) \cap P = r(P)$ и, в силу теоремы 6, $P \subset P_2$. Значит, $P = P_1$. $\square$

Приведем критерий того, что подгруппоид плоский.

Предложение 3.4. *Пусть $G[Y]$ — подгруппоид конечного ранга n правильного группоида $G[X]$. Если подмножества X_y, $y \in Y$, попарно не пересекаются, и $l(y) = \#X_y$ для всех $y \in Y$, то подгруппоид $G[Y]$ является плоским.*

Доказательство. Предположим противное: $G[Y]$ строго содержится в подгруппоиде $G[Z]$ ранга $r \leqslant n$. Рассмотрим подмножества $Z_y \subset Z$, $y \in Y$. Имеем: $X_y = \bigcup_{z \in Z_y} X_z$; следовательно, если хотя бы два подмножества Z_y пересекаются, то пересекаются и соответствующие подмножества X_y, что противоречит условию. Таким образом, подмножества Z_y не пересекаются. Но тогда, так как $r \leqslant n$, это возможно только при $r = n$. В этом случае все подмножества Z_y – одноэлементные, т.е. $Z_y = \{z_y\}$, $z_y \in Z$, причем отображение $y \to z_y$ является биекцией $Y \to Z$, $z_y \in Z$. Тогда $z_y \neq y$ хотя бы для одного $y \in Y$, так как в противном случае группоиды $G[Y]$ и $G[Z]$ совпадают. Если $z_y \neq y$, то $l(y) > l(z_y)$. С другой стороны, $X_y = X_{z_y}$. Поэтому, так как $l(z_y) \geqslant \#X_{z_y}$, то $l(y) > \#X_y$, что противоречит условию. $\square$

3.5. **Решетки плоских подгруппоидов.** Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$ совокупность плоских подгруппоидов правильного группоида G. Поскольку пересечение плоских подгруппоидов есть плоский подгруппоид, на $\mathcal{L}$ определена структура решетки по включению: произведение $G_1 \wedge G_2$ подгруппоидов $G_1 = G[X]$ и $G_2 = G[Y]$ определено так же, как и в решетке L, а их сумма $G_1 \vee G_2$ есть плоский подгруппоид, натянутый на подгруппоид $G(X \cup Y)$.

Поскольку определения суммы на $\mathcal{L}$ и L не совпадают, то $\mathcal{L}$ не является подрешеткой в L.

Теорема 8. *Ранги плоских подгруппоидов G_1, G_2, $G_1 \wedge G_2$ и $G_1 \vee G_2$ связаны соотношением* (17).

Это неравенство следует из аналогичного неравенства в решетке L, если учесть, что ранг суммы подгруппоидов в решетке $\mathcal{L}$ не превосходит ранга их суммы в решетке L.

Определение. Скажем, что плоский подгруппоид G_1 покрывает плоский подгруппоид G_2, если $G_2 \subset G_1$ и $r(G_1) = r(G_2) + 1$.

Из определения плоских подгруппоидов следует, что не существует плоских подгруппоидов Z, отличных от G_1 и G_2 таких что $G_2 \subset Z \subset G_1$. Поэтому введенное определение согласовано с определением покрытия в теории решеток.

Предложение 3.5. *Если G_1 – плоский подгруппоид группоида G и $r(G_1) < r(G)$, то существует плоский подгруппоид G_2, покрывающий G_1.*

Доказательство. Пусть $G_1 = G[X]$ и $r(G_1) = n$. По условию существует элемент $a \in G \setminus G_1$. Пусть $P = P(X \cup \{a\})$ – плоский подгруппоид, натянутый на $G(X \cup \{a\})$. Тогда $r(P) \leqslant n + 1$. Так как G_1 не может строго содержаться в подгруппоиде ранга $r \leqslant n$, то случай $r(P) \leqslant n$ исключается. Значит, $r(P) = n + 1$. □

Предложение 3.6. *Если на решетке $\mathcal{L}$ плоские подгруппоиды G_1 и G_2, $G_1 \neq G_2$ покрывают плоский подгруппоид G, то $G_1 \vee G_2$ покрывает G_1 и G_2.*

Доказательство. Пусть $r(G) = n$; тогда $r(G_1) = r(G_2) = n + 1$. Из теоремы 8 следует: $r(G_1 \vee G_2) \leqslant n + 2$. С другой стороны, так как $G_1 \neq G_2$, подгруппоид $G_1 \vee G_2$ строго содержит G_1 и G_2, а потому $r(G_1 \vee G_2) > n + 1$. Следовательно, $r(G_1 \vee G_2) = n + 2$. □

Из предложения 3.6 и определения полумодулярности следует:

Теорема 9. *Решетка $\mathcal{L}$ полумодулярна.*

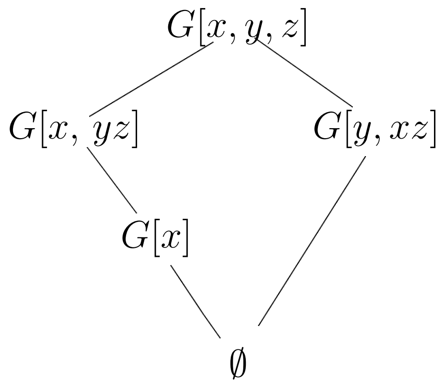


Рис. 4.

Заметим, что решетка $\mathcal{L}$ может не быть модулярной. Например, решетка $\mathcal{L}$, связанная со свободным группоидом $G[x, y, z]$, содержит подрешетку, изображенную на Рис. 4.

Между тем, модулярные решетки подрешетками такого вида не обладают.

3.6. **Пример: решетка плоских подгруппоидов свободного идемпотентого группоида ранга четыре.** Решетка плоских подгруппоидов свободного идемпотентого группоида G ранга 4 состоит из плоских подгруппоидов ранга 1, ранга 2 и ранга 3. Естественно называть их, соответственно, точками, прямыми и плоскостями. Все подгруппоиды ранга 1 являются плоскими и совпадают с одноточечными подмножествами в G (по условию идемпотентности: $xx = x$ для любого $x \in G$). Единственным плоским подгруппоидом ранга 4 является сам группоид G.

На каждой прямой и каждой плоскости фиксированы, соответственно, 2 и 3 точки: базы этих подгруппоидов.

Через две различные точки проходит ровно одна прямая; через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

Любые две прямые либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке, либо совпадают. Если две прямые пересекаются в одной точке a, то a принадлежит базе хотя бы одной из этих прямых.

Плоскость имеет не более одной общей точки с прямой, не лежащей в этой плоскости.

Две различные плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются в точке, либо пересекаются по прямой (возможны все три случая).

Если точки a, b, c образуют базу плоскости, то прямая, проходящая через две из них, имеет их в качестве своей базы.

Если прямая l на плоскости пересекает прямые $\overline{a,b}$ и $\overline{a,c}$, то точки пересечения образуют базу прямой l. Отсюда следует, что l не может пересекать $\overline{b,c}$.

3.7. **Полуплоские подгруппоиды.** Из теоремы 5 следует, что плоский подгруппоид содержит вместе с любым конечным набором элементов натянутый на них плоский подгруппоид. Обратно, если подгруппоид $G[X]$ конечного ранга содержит вместе с каждым конечным набором точек натянутый на них плоский подгруппоид, то он плоский.

В самом деле, пусть $P(X)$ – плоский подгруппоид, натянутый на X. По условию, $P(X) \subset G(X)$. С другой стороны, поскольку $X \subset P(X)$, то $G(X) \subset P(X)$. Значит, $P(X) = G(X)$.

Введем семейства подгруппоидов, промежуточные между множеством всех подгруппоидов конечного ранга и семейством плоских подгруппоидов.

Определение. Назовем подгруппоид $G[X]$ конечного ранга полуплоским рода k, если вместе с любыми k элементами он содержит и натянутый на них плоский подгруппоид.

В силу этого определения, если $G[X]$ – полуплоский подгруппоид рода k, то все подгруппоиды $G[X']$, $X' \subset X$, где $\#X' \leqslant k$, являются плоскими. В частности, при $k \geqslant r(G[X])$ сам подгруппоид $G[X]$ плоский.

При $k < r(G)$ подгруппоид $G[X]$ может и не быть плоским.

Пример 1. Подгруппоид $G[xy, yx]$ свободного группоида $G[x, y]$ не является плоским, поскольку $P(xy, yx) = G[x, y]$. Между тем, вместе с каждым элементом z он содержит и порожденный им плоский подгруппоид ранга 1.

Пример 2. Подгруппоиды

$G[x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_nx_1]$ и $G[y_1, \ldots, y_n]$

свободного группоида $G[x_1, \ldots, x_n]$, где

$y_1 = (\ldots((x_1x_2)x_3)\ldots)x_n$, а $y_2, \ldots, y_n$

получаются из y_1 циклической перестановкой $x_1, \ldots, x_n$. Их ранг равен n. Они являются полуплоскими рода $n-1$, но не плоскими.

Пересечение двух полуплоских подгруппоидов рода k является также полуплоским подгруппоидом рода k; это следует непосредственно из их определения и из свойств плоских подгруппоидов. Поэтому на множестве полуплоских подгруппоидов фиксированного рода определена структура решетки по вложению. В отличие от решетки плоских подгруппоидов, эта решетка, вообще говоря, не полумодулярна; в ней не всегда выполняется и условие обрыва убывающих цепочек, как показывает следующий пример.

Пример 3. Решетка полуплоских подгруппоидов рода 1 свободного группоида $G[x, y]$ содержит бесконечную убывающую последовательность

$$G[x_1, y_1] \supset G[x_2, y_2] \ldots \supset G[x_n, y_n], \supset \ldots,$$

где $x_1 = x,\ y_1 = y$, $x_{n+1} = x_n x_n$, $y_{n+1} = y_n y_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

3.8. **Слабо правильные группоиды.**

Определение. Назовем группоид G (вообще говоря, не обладающий базой) слабо правильным, если каждый его подгруппоид конечного ранга является правильным.

Каждый правильный группоид является слабо правильным (см. предложение 2.5). Отсюда следует:

Предложение 3.7. *Индуктивный предел G возрастающей последовательности правильных группоидов*

$$G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$$

является слабо правильным группоидом.

В самом деле, любой подгруппоид конечного ранга в G содержится в одном из группоидов G_n, а потому является правильным.

Предложение 3.8. *Любой слабо правильный группоид G счетной мощности является индуктивным пределом возрастающей последовательности правильных группоидов конечного ранга.*

В самом деле, если $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — элементы группоида G, то G является объединением возрастающей последовательности правильных подгруппоидов $G_n = G(x_1, \ldots, x_n)$.

Отметим, что существуют слабо правильные группоиды, не являющиеся правильными. Например, индуктивный предел свободных группоидов $G_n = G[x_n]$ ранга 1, где вложения $G_n \to G_{n+1}$ задаются равенствами $x_n = x_{n+1}x_{n+1}$.

Предложение 3.9. *Подгруппоиды конечного ранга слабо правильного группоида образуют решетку относительно операций пересечения и суммы, и для них справедливы все теоремы о пересечениях и суммах подгруппоидов конечного ранга правильных группоидов.*

Это следует из того, что любая пара подгруппоидов конечного ранга слабо правильного группоида содержится в подгруппоиде конечного ранга, т.е. в правильном подгруппоиде.

Определение. Назовем подгруппоид G конечного ранга r слабо правильного группоида плоским, если не существует подгруппоида G' ранга $r' \leqslant r$, строго содержащего G.

В слабо правильном группоиде плоские подгруппоиды, вообще говоря, не образуют решетки:

Пример. Пусть G — индуктивный предел свободных группоидов

$G_n = G[x_n, y_n]$,

где вложения $G_n \to G_{n+1}$ задаются равенствами $x_n = x_{n+1}x_{n+1}$, $y_n = y_{n+1}y_{n+1}$. Подгруппоиды $G[x_1y_1]$ и $G[y_1x_1]$ ранга 1 являются плоскими, а их сумма

$G(x_1y_1, y_1x_1)$

не является плоским подгруппоидом в G, поскольку содержится в любом подгруппоиде G_n ранга 2. Более того, любой подгруппоид ранга 2 содержится в G_n при достаточно большом n, а потому не является плоским.

Определение. Скажем, что слабо правильный группоид удовлетворяет условию обрыва цепочек, если стабилизируются все возрастающие последовательности подгруппоидов конечного невозрастающего ранга:

$$G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots, \quad \text{где } r(G_{n+1}) \leqslant r(G_n).$$

Для таких группоидов справедливы все полученные ранее результаты о правильных группоидах. Именно:

1) каждый подгруппоид $G[X]$ конечного ранга содержится хотя бы в одном плоском подгруппоиде;
2) существует единственный плоский подгруппоид наименьшего ранга, содержащий данный подгруппоид $G[X]$ конечного ранга;
3) плоские подгруппоиды образуют решетку относительно определенных выше операций пересечения и суммы, .

4. Топологические группоиды

4.1. **Свободные топологические группоиды.** Пусть $G[X]$ свободный группоид, порожденный бесконечным множеством X, и на X задана структура топологического хаусдорфова пространства.

Продолжим топологию на X до топологии на всем группоиде $G[X]$. Для этого представим $G[X]$ в виде дизъюнктного объединения:

$$G[X] = \coprod_{n=1}^{\infty} X_n,$$

где X_n – подмножество элементов высоты n, и определим индукцией по $h(x)$ базу окрестностей произвольной точки $x \in G[X]$.

Для точек высоты 1, т.е. для точек $x \in X$. база окрестностей определяется исходя из топологии на X. Пусть базы окрестностей уже определены для всех точек высоты меньшей n, и пусть $h(x) = n$. Представим x в виде произведения $x = uv$, где $h(u), h(v) < n$, и определим базу окрестностей точки x как совокупность множеств

$$V_u V_v = \{u'v' \quad | \quad u' \in V_u, \quad v' \in V_v\},$$

где V_u и V_v пробегают соответственно базы окрестностей точек u и v.

Назовем группоид $G[X]$ с введенной так топологией свободным топологическим группоидом, порожденным топологическим пространством X. Очевидно, что топология на $G[X]$ является хаусдорфовой.

Из определения топологии на $G[X]$ непосредственно следует

Предложение 4.1. *Операция умножения на $G[X]$ непрерывна относительно введенной топологии.*

Предложение 4.2. *Подмножества $G_s \subset G[X]$, с произвольной фиксированной схемой s открыты и замкнуты в $G[X]$.*

(Проверяется индукцией по высоте элементов.)

Следствие. *Подмножества элементов фиксированной длины и высоты открыты и замкнуты в $G[X]$.*

Предложение 4.3. *Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – любые элементы свободного топологического группоида $G[X]$, не обязательно попарно различные, и $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ – любые окрестности этих элементов в $G[X]$. Тогда, если X не содержит изолированных точек, то существуют элементы $z_i \in V_{y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ такие, что множества X_{z_i} попарно не пересекаются и $l(z_i) = \#X_{z_i}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Индукция по $N = \sum_{i=1}^{n}(l(y_i) - 1)$. При $N = 0$, т.е. когда $y_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, утверждение очевидно. Докажем его для произвольного N в предположении, что для значений меньших N оно уже доказано.

В этом случае хотя бы один элемент y_i, например, y_1, представим в виде произведения $y_1 = uv$. Так как $(l(u)-1)+(l(v)-1) = l(y_1)-2$, то $(l(u)-1)+(l(v)-1)+\sum_{i=2}^{n}(l(y_i)-1) = N-1$. Поэтому для множества элементов $u, v, y_2, \ldots, y_n$ утверждение справедливо в силу индуктивного предположения. Таким образом, в любых окрестностях $V_u, V_v, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ элементов $u, v, y_2, \ldots, y_n$ существуют элементы $u', v', z_2, \ldots, z_n$ такие, что множества $X_{u'}, X_{v'}, X_{z_2}, \ldots, X_{z_n}$ попарно не пересекаются и $l(u') = \#X_{u'}$, $l(v') = \#X_{v'}$ и $l(z_i) = \#X_{z_i}$, $i = 2, \ldots, n$. Но тогда элементы $z_1 = u'v', z_2, \ldots, z_n$ обладают требуемым свойством. $\square$

4.2. **Согласованные системы окрестностей.** Пусть $G[Y] = G[y_1, ..., y_n]$ – подгруппоид свободного топологического группоида $G[X]$, и каждой точке $u \in G[Y]$ поставлена в соответствие ее окрестность $V_u \subset G[X]$.

Определение. Назовем систему окрестностей $\{V_u \mid u \in G[Y]\}$ согласованной, если

1) каждая окрестность состоит из элементов с одинаковыми схемами;

2) окрестности V_u попарно не пересекаются;

3) $V_{uv} = V_u V_v$ для любых $u, v \in G[Y]$.

Заметим, что любая согласованная система однозначно определяется заданием окрестностей V_{y_i}, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям $1), 2)$.

Из определения непосредственно следует

Предложение 4.4. *Если $\{V_u \mid u \in G\}$ – согласованная система окрестностей для подгруппоида G, и G' – подгруппоид в G, то $\{V_u \mid u \in G'\}$ является согласованной системой окрестностей для G'.*

4.3. **Топологические пространства подгруппоидов.** Обозначим через M или $M[X]$ множество всех подгруппоидов конечного ранга свободного топологического группоида $G[X]$. Введем на M топологию, индуцированную топологией на $G[X]$.

Пусть $G[Y] = G[y_1, \ldots, y_n]$ – произвольный подгруппоид конечного ранга. Обозначим через $M(V_{y_1}, \ldots, V_{y_n})$, где $V_{y_i} \subset G[X]$, – окрестности точек $y_1, \ldots, y_n$, множество всех подгруппоидов $G(z_1, \ldots, z_n)$, у которых $z_i \in V_{y_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Зададим топологию на M, приняв в качестве базиса окрестностей любого подгруппоида $G[y_1, \ldots, y_n]$

совокупность множеств $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$, где для каждого $i=1,\dots,n$ V_{y_i} пробегает базис окрестностей точки y_i,

Очевидно, что эта топология хаусдорфова.

4.4. **Теорема о ранге.** Пусть $G_0 = G[y_1,\dots,y_n]$ – произвольный подгруппоид конечного ранга свободного топологического группоида $G[X]$ и $V_{y_1},\dots,V_{y_n}$ – окрестности элементов $y_1,\dots,y_n$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) п. 4.2

Теорема 10. *Для каждого подгруппоида $G \subset G[X]$ из окрестности $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$ группоида G_0 определен естественный изоморфизм группоидов $G \to G_0$.*

Доказательство. Пусть $\{V_u|\ u \in G_0\}$ — согласованная система окрестностей для группоида G_0. Из определения окрестности $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$ следует, что $G = G(z_1,\dots,z_n)$, где $z_i \in V_{y_i}$, $i=1,\dots,n$. Значит, в силу условия согласованности, каждый элемент $z \in G$ принадлежит одной из окрестностей V_u. Поскольку окрестности V_u попарно не пересекаются, то этим определено отображение $G \to G_0$, переводящее z_i в y_i, $i=1,\dots,n$ и сохраняющее умножение, Так как $\{y_1,\dots,y_n\}$ – базисное множество, то $\{z_1,\dots,z_n\}$ — также базисное множество, а потому отображение $G \to G_0$ есть изоморфизм группоидов. $\square$

Следствие 1. *Подмножества $M_n \subset M$ подгруппоидов любого фиксированного ранга n открыты и замкнуты в M.*

Следствие 2. *Окрестность $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$ пространства подгруппоидов M гомеоморфна произведению окрестностей $V_{y_1}\times\ldots\times V_{y_n}$.*

4.5. **Теорема о плоских подгруппоидах.**

Теорема 11. *Если пространство X не содержит изолированных точек, то подмножество $M^0 \subset M$ плоских подгруппоидов открыто и всюду плотно в M.*

Доказательство. Пусть $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$ – окрестность произвольного подгруппоида $G = G[y_1,\dots,y_n]$ в $G[X]$. В силу 4.3, существуют элементы $z_i \in V_{y_i}$, $i=1,\dots,n$ такие, что множества X_{z_i} попарно не пересекаются и $l(z_i) = \#X_{z_i}$, $i=1,\dots,n$. Но тогда, согласно предложению 3.4, подгруппоид $G(z_1,\dots,z_n)$, принадлежащий окрестности $M(V_{y_1},\dots,V_{y_n})$, является плоским. Отсюда следует, что подмножество M^0 плоских подгруппоидов всюду плотно в M. Докажем, что это подмножество открыто, Пусть $G_0 = G[y_1, \dots, y_n]$ – произвольный плоский подгруппоид в $G[X]$. Введем подгруппоид $G[X_Y]$, где $X_Y = \cup_{i=1}^{n} X_{y_i}$, и зафиксируем произвольную согласованную систему окрестностей $\{V_z \mid z \in G[X_Y]\}$ для $G[X_Y]$. Поскольку G_0 является подгруппоидом в $G[X_Y]$, то $\{V_z \mid z \in G_0\}$ является согласованной системой окрестностей для G_0.

Рассмотрим окрестность $M(V_{y_1}, \dots, V_{y_n})$ подгруппоида G_0 Пусть G' – произвольный подгруппоид из этой окрестности, т.е. $G' = G(y'_1, \dots, y'_n)$, где $y'_i \in V_{y_i}$, $i = 1, \dots, n$. Согласно теореме 10 элементы y'_i образуют базис в G'. Докажем, что подгруппоид G' является плоским.

Сначала введем подгруппоид $G[X_{Y'}] \supset G'$, где $X_{Y'} = \cup_{i=1}^{n} X_{y'_i}$. Согласно теореме 10, определен изоморфизм подгруппоидов $\sigma : G' \to G_0$. Продолжим его до отображения $\sigma : G[X_{Y'}] \to G[X_Y]$. По построению, каждый элемент $z' \in G[X_{Y'}]$ принадлежит одной из окрестностей V_z, $z \in G[X_Y]$. Так как окрестности V_z попарно не пересекаются, то тем самым определено отображение $\sigma : G[X_{Y'}] \to G[X_Y]$, совпадающее на G' с исходным отображением. Оно сюръективно и сохраняет операцию умножения, схемы и отношение подчиненности элементов. Однако, σ не является, вообще говоря, биекцией.

Предположим, что подгруппоид G' не плоский, т.е.G' строго содержится в подгруппоиде $G'' = G[U] \subset G[X_{Y'}]$, $U = \{u_1, \dots, u_r\}$, где $r \leqslant n$ и $\cup_{i=1}^{n} U_{y_i} = U$. Тогда $\sigma G'' \supset G_0$ и ранг $\sigma G''$ не превышает n. Так как среди элементов u_i имеются строго подчиненные хотя бы одному y'_i, а отображение σ сохраняет отношение подчиненности, то $\sigma G'' \neq G_0$. Это противоречит условию, что G_0 – плоский подгруппоид. $\square$

4.6. **Свободные идемпотентные и свободные коммутативные топологические группоиды.** Приведенная в п. 4.1 топологизация свободных группоидов $G[X]$ автоматически переносится на свободные идемпотентные и свободные коммутативные группоиды. Таким образом возникают два новых класса топологических группоидов — свободные идемпотентные и свободные коммутативные топологические группоиды.

Все утверждения и их доказательства для свободных топологических группоидов, приведенные выше, сохраняют силу и для этих новых классов топологических группоидов. В частности, топология на этих группоидах является хаусдорфовой.

Заметим, что если применить эту топологизацию к произвольному правильному группоиду $G[X]$, то топология на

$G[X]$ может оказаться нехаусдорфовой, как показывает следующий пример:

Пример. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Предположим, что элементы x_1 и x_2 не перестановочны, но любые их окрестности V_{x_1}, V_{x_2} содержат элементы $y_1 \in V_{x_1}$, $y_2 \in V_{x_2}$, перестановочные между собой. Тогда окрестности $V_{x_1 x_2} = V_{x_1} V_{x_2}$ и $V_{x_2 x_1} = V_{x_2} V_{x_1}$ элементов $x_1 x_2$ и $x_2 x_1$ имеют непустое пересечение.

5. Метрические группоиды.

Имеется несколько способов продолжения на весь группоид метрик, заданных на его базисе.

5.1. **Свободные группоиды с архимедовой метрикой.** Пусть на базе X свободного группоида G задана архимедова метрика $\rho(x,y)$. Продолжим эту метрику на весь группоид G.

Сначала индукцией по высоте элементов продолжим ее на подмножества G_S элементов с фиксированными схемами разложения S. Если $S(x)=S(y)$, то определим $\rho(x,y)$ индукцией по высоте элементов x,y. Если $h(x)=h(y)=1$, то x, y принадлежат X и $\rho(x,y)$ определено изначально. Пусть теперь $h(x)=h(y)=n>1$. Представим x, y в виде произведений: $x=x_1x_2$, $y=y_1y_2$, где высота всех сомножителей меньше n. Тогда $S(x_1)=S(x_2)$, $S(y_1)=S(y_2)$, а, потому, $\rho(x_1,y_1)$ и $\rho(x_2,y_2)$ уже определены в силу индуктивного предположения. Положим

$$\rho(x,y)=\sqrt{\rho^2(x_1,x_2)+\rho^2(y_1,y_2)}$$

Очевидно, что определенная так метрика на G_S архимедова.

Определим теперь $\rho(x,y)$ при $S(x)\neq S(y)$. Фиксируем для каждой схемы разложения S элемент $u_S\in G_S$. Если $x\in G_{S_1}$, $y\in G_{S_2}$, $S_1\neq S_2$, то полагаем

$$\rho(x,y)=\rho(x,u_{S_1})+\rho(y,u_{S_2})+a$$

где a — произвольное фиксированное положительное число.

Предложение 5.1. *Определенная так метрика ρ на G является архимедовой.*

Доказательство. Достаточно проверить справедливость аксиомы треугольника для элементов $x\in G_{S_1}$, $y\in G_{S_2}$, $z\in G_{S_3}$ в двух случаях.

1) $S_1=S_2,\ S_1\neq S_3$;

2) S_1, S_2, S_3 попарно различны.

В первом случае имеем:

$$\rho(x,z)=\rho(x,u_{S_1})+\rho(z,u_{S_3})+a$$

$$\rho(y,z)=\rho(y,u_{S_2})+\rho(z,u_{S_3})+a$$

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,u_{S_1})+\rho(y,u_{S_2})+a$$

Отсюда следует неравенство треугольника. Во втором случае последнее неравенство заменяется равенством

$$\rho(x, y) = \rho(x, u_{S_1}) + \rho(y, u_{S_2}) + a$$

Это снова дает неравенство треугольника. $\square$

Предложение 5.2. *Пусть T — топология на X, индуцированная метрикой ρ на X. Тогда топология на всем группоиде G, индуцированная метрикой ρ, эквивалентна топологии, которая индуцирована на всем G топологией T.*

Утверждение следует непосредственно из определения топологии или метрики на группоиде, индуцированной, соответственно, топологией и метрикой на базисе.

Эта конструкция переносится и на свободные коммутативные и-или идемпотентные группоиды.

5.2. **Свободные группоиды с неархимедовой метрикой.** Пусть на базе X свободного группоида $G[X]$ задана структура ультраметрического пространства, т.е. задана функция (расстояние) $d : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям :

1) $d(x, y) \geqslant 0$;
2) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$;
4) $d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y),\ d(y, z)\}$.

Такие метрики называют, также, неархимедовыми. Покажем, как эту метрику продолжить на весь свободный группоид G.

Сначала, индукцией по высоте элементов продолжим ее на подмножества G_S элементов с фиксированными схемами разложения S.

Если $S(x) = S(y)$, то определим $d(x, y)$ индукцией по высоте элементов x,y. Если $h(x) = h(y) = 1$, то x, y принадлежат X и $d(x, y)$ определено изначально. Пусть теперь $h(x) = h(y) = n > 1$. Представим x, y в виде произведений: $x = x_1x_2, y = y_1y_2$, где высота всех сомножителей меньше n. Тогда $S(x_1) = S(x_2), S(y_1) = S(y_2)$, а, потому, $d(x_1, y_1)$ и $d(x_2, y_2)$ уже определены в силу индуктивного предположения. Положим

$$d(x, y) = \max\{d(x_1, y_1),\ d(x_2, y_2)\}$$

Очевидно, что так определенная на G_S метрика — неархимедова. Определим теперь $d(x, y)$ при $S(x) \neq S(y)$. Фиксируем для каждой схемы разложения S элемент $u_S \in G_S$. Если $x \in G_{S_1}$, $y \in G_{S_2}$, $S_1 \neq S_2$, то полагаем

$$d(x,y) = \max\{d(x,u_{S_1}); d(y,u_{S_2}); a\},$$

где a — произвольное фиксированное положительное число.

В частности, если $d(x',y') \leq a$ для всех $x',y' \in X$ то $d(x,y) = a$

Легко убедиться, что так определенная функция $d(x,y)$ на G удовлетворяет всем аксиомам неархимедовой метрики.

Предложение 5.3. *Пусть T — топология на X, индуцированная метрикой $d(.,.)$ на X. Тогда топология на всем группоиде G, индуцированная метрикой d, эквивалентна топологии, которая индуцирована на всем G топологией T.*

Утверждение следует непосредственно из определения топологии и метрики на группоиде, индуцированных, соответственно, топологией и метрикой на базисе.

Эта конструкция, как и предыдущая, переносится и на свободные коммутативные и-или идемпотентные группоиды.

5.3. **Неархимедова метрика на идемпотентном группоиде.** Напомним, что группоид $G = G[X]$ называется свободным идемпотентным, если $xx = x$ для всех $x \in G$, элементы базы X неразложимы и равенство $x_1y_1 = x_2y_2$, где $x_1 \neq y_1$ и $x_2 \neq y_2$, имеет место только при $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Пусть на базисе X такого группоида задана неархимедова метрика d. Продолжим метрику d на весь группоид $G[X]$ индукцией по высоте элементов $x \in G[X]$, следующим образом.

Для элементов x, y высоты 1, т.е. при $x, y \in X$, функция d определена изначально. Предположим, что она уже определена на подмножестве элементов высоты меньшей n, и пусть $\max\{h(x), h(y)\} = n$, например, $h(y) = n$. Тогда полагаем:

$$d(x,y) = \max\{d(x,y_1), d(x,y_2)\} \quad \text{при } h(x) < n, \tag{18}$$

где $y_1 \neq y_2$ — элементы высоты меньшей n, определяемой из разложения $y = y_1y_2$;

$$d(x,y) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\} \quad \text{при } h(x) = n, \tag{19}$$

где $x_1 \neq x_2$ — элементы высоты меньшей n, определяемой из разложения $x = x_1x_2$.

Непосредственно проверяется:

Предложение 5.4. *Введенная функция d на $G[X]$ удовлетворяет условиям ультраметричности 1)–4).*

(В проверке нуждается только условие 4)).

Назовем группоид $G[X]$ с введенной так метрикой d свободным идемпотентным ультраметрическим группоидом или, короче, U–группоидом.

Пример. Вычислим расстояние между элементами $z_1 = xz$ и $z_2 = (xy)z$ в группоиде $G[x, y, z]$. Так как $h(xz) < h((xy)z)$, то

$$d(xz, (xy)z) = \max\{d(xz, xy), d(xz, z)\}.$$

Далее, так как $h(xz) = h(zy)$ и $h(xz) > h(z)$, то

$$d(xz, xy) = \max\{d(x, x), d(z, y)\} = d(z, y),$$
$$d(xz, z) = \max\{d(x, z), d(z, z)\} = d(z, z).$$

Таким образом

$$d(xz, (xy)z) = \max\{d(z, y), d(x, z)\}.$$

Замечание 1. Требование идемпотентности группоида существенно. В противном случае существуют элементы вида $y = xx$, где $x \neq y$. Для них, согласно (18) $d(x, y) = 0$, что противоречит определению метрики d.

Замечание 2. Приведем другое описание метрики d, при котором справедливость условия 4 становится очевидной. Воспользуемся тем, что $G[X]$ является объединением возрастающей цепочки подмножеств $V^{(n)}$, где $V^{(1)} = X$ и $V^{(n)} = V^{(n-1)}V^{(n-1)}$; множество $V^{(n-1)}$ вложено в $V^{(n)}$ как подмножество элементов xx. Представим элементы $x \in V^{(n)}$ в виде $x = uv$, $u, v \in V^{(n-1)}$, где $u = v = x$, если $x \in V^{(n-1)}$, и $u \neq v$, если $x \notin V^{(n-1)}$.

Если метрика d на $V^{(n-1)}$ уже определена, то для любых элементов $x = u_1v_1$, $y = u_2v_2$ из $V^{(n)}$ она задается формулой:

$$d(x, y) = \max\{d(u_1, u_2), d(v_1, v_2)\}. \tag{20}$$

5.4. **Теорема о шарах.** Пусть $G[X]$ — группоид с метрикой, введенной в п. asect:12-1a. Обозначим через $X^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, подмножество элементов фиксированной высоты n в U–группоиде $G[X]$.

Теорема 12. *Пусть Ω — произвольный шар в $G[X]$, т.е.*

$$\Omega = \{y \in G[X] \mid d(x, y) \leqslant r\},$$

где $x \in X$ и $r > 0$ фиксированы, и пусть k — наименьшее число, для которого множество $V = \Omega \cap X^{(k)}$ непусто. Тогда

$$\Omega = G(V),$$

где $G(V)$ — подгруппоид в $G[X]$, порожденный множеством V.

Доказательство. Так как в качестве центра шара Ω можно принять любую его точку x, то будем предполагать, что $x \in V$. Тогда

$$V = \{y \in X^{(k)} \mid d(x,y) \leqslant r\}.$$

Докажем, что $G(V) \subset \Omega$. Обозначим через $V^{(n)}$ подмножество элементов высоты n группоида $G(V)$. Согласно определению, $V^{(1)} = V$, а потому $V^{(1)} \subset \Omega$.

Пусть уже доказано, что $V^{(m)} \subset \Omega$ для всех $m < n$, и пусть $y \in V^{(n)}$. Представим y в виде произведения $y = uv$, $u \neq v$. В силу индуктивного предположения, $u, v \in \Omega$, а потому $d(x,u) \leqslant r$, $d(x,v) \leqslant r$. Так как $d(x,y) = \max\{d(x,u), d(x,v)\}$, то $d(x,y) \leqslant r$, т.е. $y \in \Omega$. Итак, доказано, что $G(V) \subset \Omega$. Обратно, пусть $y \in \Omega$. Тогда $h(y) \geqslant k$. Если $h(y) = k$, то $y \in V$, а потому $y \in G(V)$.

Пусть уже доказано, что все элементы $y \in \Omega$ высоты, меньшей n, где $n > k$, принадлежат $G(V)$, и пусть $h(y) = n$. Представим y в виде $y = uv$, где $h(u) < n$, $h(v) < n$. Так как $d(x,y) = \max\{d(x,u), d(x,v)\}$, то из $d(x,y) \leqslant r$ следует, что $d(x,u) \leqslant r$, $d(x,v) \leqslant r$, а потому $u, v \in \Omega$. Значит, в силу индуктивного предположения, $u, v \in G(V)$. Следовательно, $y \in G(V)$. $\square$

5.5. **Ультраметрическое пространство подгруппоидов.** Пусть $G[X]$ — свободный ультраметрический группоид, и M_n — множество его подгруппоидов ранга n. Введем, исходя из метрики d на $G[X]$ метрику на множестве M_n.

Определение. Положим для любых подгруппоидов $G_1 = G[x_1, \dots x_n]$, $G_2 = G[y_1, \dots y_n]$:

$$d(G_1, G_2) = \min_{\sigma} \left(\max_{i} \left(d(x_i, y_{\sigma(i)}) \right) \right), \tag{21}$$

где σ пробегает множество S_n перестановок индексов $1, \dots, n$.

Предложение 5.5. *Введенная метрика удовлетворяет аксиомам 1)–4) ультраметрического пространства.*

Доказательство. Справедливость аксиом 1)–3) очевидна. Поэтому достаточно убедиться в том, что

$$\max\{d(G_1, G_2), d(G_2, G_3)\} \geqslant d(G_1, G_3) \tag{22}$$

для любых подгруппоидов G_1, G_2, G_3 ранга n.

Пусть $G_3 = G[z_1, \dots, z_n]$. Тогда

$$d(G_2, G_3) = \min_{\sigma} \left(\max_{i} \left(d(y_i, z_{\sigma(i)}) \right) \right),$$

$$d(G_1, G_3) = \min_{\sigma} \left(\max_{i} \left(d(x_i, z_{\sigma(i)}) \right) \right).$$

Очевидно, неравенство (22) эквивалентно следующему условию: для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ и $k = 1, \ldots, n$ существует $\sigma \in S_n$ такое, что

$$\max[\max_i(d(x_i, y_{\sigma_1(i)})),\ \max_i(d(y_i, z_{\sigma_2(i)}))] \geqslant d(x_k, z_{\sigma(k)}) \qquad (23)$$

Проверим это условие. Имеем для любого k :

$$\max[\max_i(d(x_i, y_{\sigma_1(i)})),\ \max_i(d(y_i, z_{\sigma_2(i)}))]$$
$$\geqslant \max[d(x_k, y_{\sigma_1(k)}),\ d(y_k, z_{\sigma_2\sigma_1(k)})] \geqslant d(x_k, z_{\sigma_2\sigma_1(k)})$$

Таким образом, положив $\sigma = \sigma_2\sigma_1$, получаем неравенство (23). $\square$

Теорема 13. *Если пространство X не содержит изолированных точек, то подмножество $M_n^0 \subset M_n$ плоских подгруппоидов ранга n всюду плотно относительно введенной метрики d.*

Для доказательства достаточно заметить, что топология T_d на M_n, индуцированная метрикой d, сильнее топологии T, введенной в § 4, поскольку любая окрестность подгруппоида G_1 в топологии T_d содержит его окрестность в топологии T. Согласно теореме 11, подмножество M_n^0 всюду плотно в M_n относительно топологии T. Значит, и подавно оно всюду плотно относительно топологии T_d

6. Графы, связанные с группоидом

С правильными группоидами можно естественно связать несколько конструкций направленного графа. Выше в п.2.9 была введена одна из них: граф с меченными ребрами — схема разложения. В этом разделе появятся другие графы, характеризующие правильный группоид. Они позволяют подключить к анализу геометрическую и комбинаторную интуицию.

6.1. **Граф свободного группоида.** Каждому свободному группоиду $G[X]$ с базисным множеством X можно сопоставить напрвленный граф, ребра которого мечены как правое (R) и левое (L). Вершины графа имеют уникальные метки: они находятся в биективном соответствии с элементами группоида G. Каждый элемент свободного группоида имеет единственное представление в виде произведения двух элементов $x = uv$. Из вершины с меткой x (обозначение $[x]$) выходит левое ребро в вершину $[u]$ и правое ребро в вершину $[v]$. В случае $u = v$ из $[x]$ выходят оба ребра в $[u]$ — сдвоенное ребро. Этот граф назовем графом свободного группоида.

Предложение 6.1. *Граф свободного группоида обладает следующими свойствами.*

1) Базисное множество X помечает множество вершин, из которых не выходят ребра (концевые вершины).

2) В каждую вершину входит бесконечно много правых и левых ребер, а выходит, если вершина не концевая, одно левое и одно правое ребро, причем они могут быть сдвоенными.

3) Для любой пары вершин $[u], [v]$ имеется только одна вершина $[x]$, из которой в $[u]$ идет левое ребро, а в $[v]$ — правое.

4) Граф однозначно определяет бинарную операцию на группоиде.

5) Длина элемента группоида $l(x)$ совпадает с числом максимальных цепочек, исходящих из $[x]$. Эти цепочки соединяют $[x]$ с концевыми вершинами.

6) Высота элемента группоида $h(x) = n(x) + 1$, где $n(x)$ равно наибольшей длине максимальной цепочки, исходящей из $[x]$.

Все эти свойства непосредственно вытекают из определения.

6.2. **Диаграмма разложения элемента.** Рассмотрим произвольный группоид G. Каждому способу получения элемента x группоида G из некоторого образующего подмножества Y соответствует граф, который назовем диаграммой разложения x над Y.

Это граф $T_Y(x)$ типа дерева, корень которого соответствует последней операции при получении элемента. Если $x \in Y$, то корень является единственной вершиной графа, и она помечается знаком x.

Если элемент x не входит в базис, то он получен произведением $x = pq$. Тогда $T_Y(x)$ получается построением на корне двух входящих ребер (левого и правого), к свободным (исходящим) концам которых присоединяются корни диаграмм $T_Y(p)$ и $T_Y(q)$ соответственно.

Заметим, что диаграмма разложения элемента отличается от схемы разложения того же элемента наличием в вершинах меток в виде элементов группоида.

Вершина диаграммы разложения имеет ранг 3 (два входящих ребра, одно исходящее), если она внутренняя, или 1 (одно исходящее ребро), если она концевая.

В случае единственности разложения число ярусов дерева $T_Y(x)$ равно высоте $h_Y(x)$ элемента x относительно порождающего множества Y, а число листьев в дереве $T)Y(x)$ равно длине $l_Y(x)$.

Для произвольного группоида диаграмма разложения элемента может быть не однозначна. Но понятия высоты и длины элемента относительно порождающего множества допускают обобщение. Наименьшее возможное число ярусов дерева $T_Y(x)$ определим как высоту $h_Y(x)$ элемента x относительно порождающего множества Y. Наименьшее возможное число листьев в дереве $T_Y(x)$ с высотой $h_Y(x)$ определим как длину $l_Y(x)$ элемента x относительно порождающего множества Y. Диаграмму разложения $T_Y(x)$, на которой достигаются высота и длина элемента x, назовем оптимальной реализацией этого элемента.

В алгебраическом представлении высота соответствует наименьшему возможному уровню вложенности скобок в формуле, выражающей элемент x через множество Y. А длина соответствует наименьшему возможному числу вхождений элементов Y в формулу для x с наименьшим уровнем вложенности скобок.

Далее будем считать разложение элемента в группоиде G единственным. Вершину некоторой диаграммы разложения с меткой $z \in G$ будем обозначать $[z]$. Такая вершина может быть не единственна. Но все они являются корнями одинаковых подграфов в этой диаграмме.

В диаграмме разложения x можно расставить значения высоты и длины промежуточных элементов порождения на всех вершинах дерева $T_Y(x)$. Если [z] — лист дерева, то $h_Y(z) = 1$, $l_Y(z) = 1$. Если вершина дерева соответствует точке $z = pq$, то на диаграмме в нее входят ребра от вершин, $[p]$ и $[q]$. Поэтому

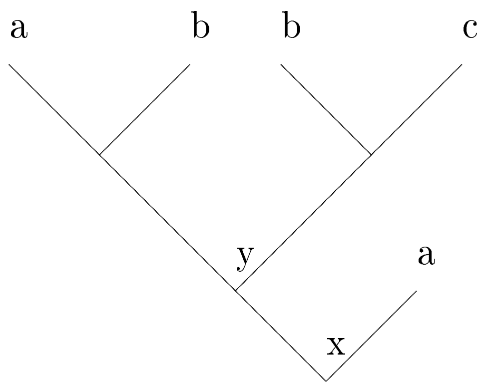
$$h_Y(z) = 1 + max\{h_Y(p), h_Y(q)\}; \tag{24}$$

$$l_Y(z) = l_Y(p) + l_Y(q). \tag{25}$$

При такой дополнительной разметке вершин диаграммы разложения элемента x сам элемент x помечает корень дерева, и ему соответствуют значения $h_Y(x)$, $l_Y(x)$.

Подграф графа свободного группоида, соответствующий разложению элемента x над базисом Y, назовем графом разложения этого элемента. Он может быть получен из диаграммы разложения $T_Y(x)$ склейкой всех вершин с одинаковыми метками $[z]$, и инверсией направления всех ребер.

Диаграмма разложения элемента правильного группоида соответствует структуре скобок в его алгебраическом выражении через базис. Далее, когда это удобно, будем использовать для диаграмм разложения алгебраическую запись с квадратными скобками, в которых будут стоять либо метки концевых вершин, либо обозначения диаграмм разложения промежуточных



Ris. 5

элементов. Например, если $a, b, c \in Y$ и $x = ((ab)(bc))a$; $y = (ab)(bc)$, то диаграмму разложения, показанную на рисунке 5, можно записать в форме

$$T_Y(x) = [[T_Y(y)][a]] = [[[T_Y(ab)][T_Y(bc)]][a]] = [[[[a][b]][[b][c]]][a]].$$

Каждой паре скобок соответствует вершина диаграммы. При этом нижним уровням дерева (ближе к корню) соответствуют внешние скобки.

6.3. **Свойства группоидов, связанные с диаграммами разложения.**

Предложение 6.2. *Условие единственности разложения является необходимым и достаточным условием для единственности диаграммы разложения произвольного элемента в подгруппоиде с базисом.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппоид $G[Y]$. Пусть в нем выполнено условие единственности разложения (не обязательно требовать выполнения условия на всем группоиде). Если диаграмма разложения $T_Y(x)$ не единственна, например есть еще диаграмма $T'_Y(x)$, то рассмотрим в $T_Y(x)$ наибольшее поддерево D, растущее из корня дерева $T_Y(x)$, для которого совпадают диаграммы $T_Y(x)$ и $T'_Y(x)$. Такое дерево всегда не пусто, так как заведомо содержит корень.

В любом листе дерева D, который не является листом $T_Y(x)$, помечающий его элемент z имеет разные существенные разложения в $T_Y(x)$ и $T'_Y(x)$ на два элемента: $z = ab$, $z = cd$ соответственно. (Существенное разложение $z = ab$ определяется условием $\{a; b\}(\{x\})$ Это противоречит требованию единственности разложения. Значит все листья дерева D совадают с листьями дерева $T_Y(x)$.

Если же лист u дерева $T_Y(x)$ не является листом дерева D, то D, как поддерево $T_Y(x)$, содержит лист v, который предшествует листу u в $T_Y(x)$. Но тогда v не является листом $T_Y(x)$, что противоречит доказанному.

Значит множество листьев поддерева D совпадает с множеством листьев дерева $T_Y(x)$. Но тогда диаграммы $T_Y(x)$ и D совпадают. Значит, дерево $T_Y(x)$ является поддеревом в $T'_Y(x)$.

Если это собственное поддерево, то некоторй лист u из $T_Y(x)$ является корнем поддерева в $T'_Y(x)$. Этот лист в обоих диаграммах помечен элементом $y(u) \in Y$. Значит имеется существенное разложение $y(u) = ab$ в подгруппоиде $G[Y]$, что противоречит определению базиса. Следовательно, диаграммы $T_Y(x)$ и $T'_Y(x)$ совпадают.

Обратно. Пусть некоторый элемент подгрупоида имеет в нем два различных существенных разложения: $z = ab$, $z = cd$. Тогда можно получить две несовпадающие диаграммы разложения $T_Y(x)$ и $T'_Y(x)$, полученные подсоединением к корню с меткой z деревьев $T_Y(a)$ слева и $T'_Y(b)$ справа или (альтернативно) $T_Y(c)$ слева и $T'_Y(d)$ справа, соответственно.

□

Следствие. *В правильном группоиде все элементы имеют единственную диаграмму разложения по неразложимым элементам.*

Замечание. Если подгруппоид $G(Y)$ порожден не базовым множеством Y, то существует элемент с несколькими диаграммами разложения даже при выполнении условия единственности разложения.

Доказательство. Если Y не базовое множество в $G(Y)$, то $y = pq$ для некоторого $y \in Y$ и $p, q \in G(Y)$. Тогда можно построить диаграмму разложения $T_Y(y)$, состоящую из одного корня с меткой y. Но можно присоединить к этому корню $T_Y(p)$ слева и $T'_Y(q)$ справа и получить другую диаграмму порождения $T'_Y(y)$. □

Теорема 14. *Любой правильный группоид является либо свободным группоидом либо его факторгруппоидом по отношениям идемпотентности на некотором подмножестве его элементов и-или коммутативности на некотором подмножестве пар элементов.*

Доказательство. По утверждению 6.2 любой элемент правильного группоида имеет единственную диаграмму разложения по базису из неразложимых элементов с точностью до соотношений, сохраняющих условие единственности разложения: если $x = pq = yz$ и $(p, q) \neq (y, z)$, то либо $p = q = x$ т. е. $\{p; q\} = \{x\}$, либо $(p, q) = (z, y)$.

Любой элемент группоида с базисом может быть записан некоторой диаграммой разложения по базису. Это значит, что этот группоид $G[X]$ может быть получен факторизацией свободного группоида $F[X]$ с тем же базисом по некоторой системе тождеств.

Допустим, в определение правильного группоида $G[X]$ введено тождество $y = uv$ для $y \in G[X]$ и каких-то двух элементов $u, v \in F[X]$. Тогда диаграмме разложения $T_X(y)_G$ в группоиде $G[X]$ соответсвуют не менее чем две диаграммы разложения в свободном группоиде $T_X(u)_F$ и $T'_X(v)_F$. На элементах из X в $G[X]$ возможны только тождества вида $x = xx$. При этом в силу единственности диаграммы $T'_X(y)_G$ и совпадения базисов в обоих группоидах все три диаграммы имеют одинаковый состав меток из базиса X на листьях. Значит при высоте $h(y)_G = 1$ возможны варианты $u = y$, $v = yy$ и диаграммы разложения

$T_X(u)_F = [y], T_X(v)_F = [[y][y]]$.

Здесь диаграмма разложения описывется структурой скобок в алгебраическом выражении корневого элемента.

Допустим, $h(y)_G = 2$. Тогда либо

$y = ab$ где $a, b(X$, $a \neq b$,

и возможно только

$u = ab$, $v = ba$, $T_X(u)_F = [[a][b]]$, $T_X(v)_F = [[b][a]]$,

либо $a = b$, и возможно $u = a, v = aa$ (с точностью до перестановки обозначений a, b).

Последний вариант при $a \in X$ соответствует ранее рассмотренному для $h(y)_G = 1$. Следовательно, для $h(y)_G = 2$ выполнено $h(a)_G = 2$. Тогда

$T_X(u)_F = [[p][p]]$, $a = pp$; $T_X(v)_F = [[[p][p]][[p][p]]]$.

В любом другом случае нарушится единственнсть $T_X(y)_G$.

Введем предположение индукции: при $h(y)_G < n$ диаграмма $T_X(y)_G$ получается из $T_X(u)_F$ тождествами вида коммутативности и-или идемпотентности для некоторых операндов.

Тогда для $h(y)_G = n$ либо $y = ab$, где $h(a)_G$, $h(b)_G < n$, и возможно только $u = ab$, $v = ba$,

$T_X(u)_F = [[T_X(a)_F][T_X(b)_F]]$,

$T_X(v)_F = [[T_X(b)_F][T_X(a)_F]]$,

либо $a = b$, и возможно $u = a, v = aa$ (с точностью до перестановки обозначений a, b).

Последний вариант при $h(a)_G < n$ соответствует $h(y)_G < n$. Следовательно, $h(a)_G = n$ для $h(y)_G = n$. Тогда

$T_X(u)_F = [[T_X(p)_F][T_X(p)_F]]$,

$T_X(v)_F = [[[T_X(p)_F][T_X(p)_F][[T_X(p)_F][T_X(p)_F]]]$,

где $a = pp$. В любом другом случае нарушится единственнсть $T_X(y)_G$. Индукция завершена

□

6.4. **Ультраметрика, связанная со схемами разложения.** В этом разделе будет построена ультраметрика, допустимая на любом правильном группоиде $G = G[X]$ и согласованная со схемами разложения элементов в том смысле, что элементы, схемы разложения которых содержат большие изоморфные корневые подсхемы, будут близки.

Пусть задана схема разложения $S(y)$ для некоторого $y \in G$. По определению, это — граф типа дерева. Пометим листья этого графа соответствующими разложению элементами из X_y. Подсхемой разложения уровня n назовем подграф $S_n(y)$ графа $S(y)$, состоящий из всех вершин и связывающих их ребер, расстояние от которых по графу до корня не превосходит n. Это также граф-дерево, возможно содержащий некоторые из меченых листьев.

Далее используется стандартное понятие изоморфизма графов с частично мечеными вершинами и ребрами. Если группоид не коммутативный, то изоморфизм для схем и подсхем разложения определяется как для графов с мечеными ребрами. В коммутативном случае ребра считаем не мечеными. В случае частичной коммутативности сопряженные ребра мечены только там, где они соответствуют некоммутативной операции над парой элементов группоида.

Рассмотрим два элемента y_1, $y_2 \in G$. Введем два обозначения. $n(y_1, y_2)$ — наибольший уровень, на котором подсхемы разложения этих элементов изоморфны. $H(y_1, y_2)$ — наибольшая из высот этих элементов.

$$n(y_1, y_2) = \max\{n|\ S_n(y_1) \simeq S_n(y_2)\} \qquad (26)$$

$$H(y_1, y_2) = \max\{h(y_1); h(y_2)\} \qquad (27)$$

Тогда расстояние определим формулой

$$D(y_1, y_2) = sign(H(y_1, y_2) - n(y_1, y_2))/(1 + n(y_1, y_2)) \qquad (28)$$

Заметим, что $H(y_1, y_2) \geq n(y_1, y_2)$, и поэтому значение расстояния неотрицательно. Обнуление возможно только при совпадении двух схем разложения с метками на листьях, когда $H(y_1, y_2) = n(y_1, y_2)$. Но тогда схемы разложения совпадают и $y_1 = y_2$. Знаменатель не обращается в ноль, так как $n(x, y) \geq 0$ и $D(x, y) \leq 1$.

Осталось доказать, что неравенство треугольника в D удовлетворяет определению ультраметрики. Пусть имеются три элемента группоида $a, b, c \in G$. Возможны два случая.

Если $n(a, c) \geq n(a, b)$, то по построению $n(b, c) = n(a, b)$.

Если $n(a, c) < n(a, b)$, то $n(b, c) = n(a, c)$

В обоих случаях $n(a, c) \geq \min\{n(a, b); n(b, c)\}$, откуда следует, что

$$D(a, c) \leq \max\{D(a, b); D(b, c)\} \tag{29}$$

Заметим, что так определенное расстояние согласовано со схемами разложения:

если $n(a, b) > n(a, c)$, то $D(a, b) < D(a, c)$.

Кроме того, эта метрика не требует начального задания метрики на базисе группоида. За это приходится платить ее дискретностью. Поэтому при такой метрике нельзя говорить о непрерывности операции группоида. Однако можно сделать более слабое утверждение.

Предложение 6.3. *В свободном группоиде метрика D удовлетворяет свойству монотонности по операции группоида:*

если $D(a, x) \leq D(a, p)$, $D(b, y) \leq D(b, q)$,

то $D(ab, xy) \leq D(ab, pq)$.

Доказательство. Определим

$$N(x, y) = n(x, y) \quad \text{если} \quad n(x, y) < H(x, y) \ \mid \ \infty \quad \text{иначе.}$$

Будем считать, что $\infty + 1 = \infty$; $1/\infty = 0$. Тогда из (28) следует

$$D(x, y) = 1/(1 + N(x, y)). \tag{30}$$

Схема разложения двух элементов получается из их схем присоединением к общему корню слева и справа соответственно. Если сомножители коммутируют, то метки на новых ребрах не ставятся. Если сомножители совпадают и идемпотентны, то новую схему надо заменить их общей исходной схемой. Поэтому легко видеть, что для любых двух пар (a, b) и (u, v) не идемпотентных и не коммутативных элементов правильного группоида верно равенство

$$N(ab, uv) = 1 + \min\{N(a, u); N(b, v)\} \tag{31}$$

Тогда из условия утверждения следует $N(a,x) \geq N(a,p)$, $N(b,y) \geq N(b,q)$, $N(ab,xy) \geq N(ab,pq)$. Переходя к обратным величинам, доказываем утверждение. $\square$

Замечание. Для группоидов с (частичной) идемпотентностью элементов свойство монотонности метрики по операции может нарушаться. Рассмотрим следующий пример. Пусть в идемпотентном правильном группоиде $G[a,b,c,d,f,g]$ заданы три пары элементов: $(ab,ab),(cd,fg),(a,b)$. Тогда

$D(ab,cd) = 1/2$; $D(ab,fg) = 1/2$; $D(ab,a) = 1$; $D(ab,b) = 1$.

Для произведений членов этих пар свойство монотонности нарушается. В силу идемпотентности $u = (ab)(ab) = ab$ и поэтому

$D(u,(cd)(fg)) = 1/2$; $D(u,ab) = 0$.

Если бы не было идемпотентности, то монотонность имела бы место:

$$D((ab)(ab),(cd)(fg)) = 1/3; \;\; D((ab)(ab),ab) = 1/2.$$

Замечание. Для правильного нигде не идемпотентного группоида второе неравенство предложения 6.3 заведомо выполняется, если первые два неравенства верны для всех перестановок p,q, которые допускает коммутативность, при некоторой допустимой перестановке x,y.

7. Геометрические структуры на алгебраических системах

Введенные выше на группоидах объекты геометрического типа, образующие полумодулярные решетки, существуют и на алгебраических системах более общего вида. Кратко опишем соответствующую конструкцию.

7.1. **Правильные алгебры и их подалгебры.** Под алгебраической системой $A = (U,F)$ будем понимать, как обычно [1], множество U, вообще говоря, бесконечное, на котором определены несколько операций вида $f : U^{\times n} \to U$, образующих множество F. Параметр $n = n(f)$, $f \in F$ может быть любым натуральным числом или нулем и принимать разные значения для разных операций f. Операция f называется n-арной, а само значение n – арностью операции f. Множество U называется носителем, а совокупность операций F— фундаментальным множеством алгебраической системы.

Следуя [2], под нуль-арной операцией будем понимать выделение некоторого элемента $x \in U$, причем x считается единственным значением этой операции.

Определим правильную алгебру, как алгебраическую систему, в которой выполняются следующие условия.

1) Условие единственности разложения. Для каждого элемента $x \in U$ имеется не более одного (с точностью до порядка элементов y_i) кортежа

$m = (f;\ y_1, ..., y_n), n > 0$, который определяет подмножество

$M = \{y_1; ...; y_n\} \subset U$, $M \neq \{x\}$, $M \neq \emptyset$, $f \in F$, $n(f) = n$,

который дает представление x в форме

$$x = f(y_1, ..., y_n). \tag{32}$$

Если элемент x не имеет такого предствления, он называется неразложимым, а, в противном случае, — разложимым.

2) Условие порождения. Все множество U порождено операциями вида (32), принадлежащими F, из подмножества неразложимых элементов.

Заметим, что в правильных алгебрах нет никаких ограничений на нуль-арные операции, которые исключены из рассмотрения условием $M \neq \emptyset$.

Далее будем предполагать, что в представлении каждого разложимого элемента выбран определенный порядок операндов. Это не уменьшает общности. Например, можно линейно упорядочить все элементы алгебраической системы, и в случае нескольких возможных перестановок операндов в разложении (32) некоторого элемента использовать минимальный возможный лексикографический порядок.

Обозначим $A(X)$ подсистему алгебраической системы A, порожденную операциями из F над множеством X. Если X является минимальным подмножеством, порождающим $A(X)$, то назовем его базисом подалгебры, и подалгебру будем обозначать $A[X]$. В правильной алгебре базис любой подалгебры единственный. Он состоит из элементов, неразложимых в данной подалгебре. Число элементов базиса назовем рангом подалгебры и обозначим $r(A[X]) = \#X$.

Подалгебра конечного ранга называется плоской, если нет подалгебры не превосходящего ранга, строго содержащей ее. Сама правильная алгебра также будет считаться своей плоской подалгеброй, если имеет конечный ранг.

Все теоремы для правильных группоидов и их (плоских) подгруппоидов переносятся на правильные алгебры и их (плоские) подалгебры с естественными переформулировками.

Для алгебраических систем также можно строить представление в форме графов алгебры [2] или схем и диаграмм разложения элементов. Также, как и в случае группоидов, это графы с меченными ребрами. В качестве метки ребра в общем случае надо использовать знак операции f и номер i операнда y_i в ней. Сам операнд y_i помечает в диаграмме разложения исходную вершину ребра. В схемах разложения вершины остаются не меченными.

7.2. **Вложение алгебраической системы в группоид.** Для любой правильной алгебры можно определить вложение в некоторый свободный группоид, так, что каждая алгебраическая операция будет соответствовать выражению в группоиде. Тогда любое алгебраическое выражение, как суперпозиция операций, также отобразится в некоторое выражение в группоиде. При этом, одному элементу правильной алгебры будет соответствовать один элемент группоида.

Назовем синтаксическим образом правильной алгебры $A[X] = A = (U, F)$ отображение $H = H_A : U \to G$ где G — свободный группоид $G = G[X \cup F]$, заданное следующей рекуррентной формулой.

Если $x \in X$ то

$$H(x) = x \in G. \tag{33}$$

Если $x = f(y_1, ..., y_n)$, то

$$H(x) = f(H(y_1)(...(H(y_{n-1})H(y_n))...)) \in G. \tag{34}$$

В синтаксическом образе использована правая группировка скобок.

Рекуррентное определение синтаксического образа определяет и высоту элемента правильной алгебры над базисом.

Элементы x высоты 1 принадлежат базису X и отображаются в одноименные элементы базиса группоида.

Элементы y высоты 2 выражаются через элементы базиса формулами вида

$y = f(x_1, ..., x_n),\ f \in F;\ n(f) = n,\ x_1, ..., x_n \in X$

и отображаются в элементы свободного группоида вида

$$H(y) = f(x_1(...(x_{n-1}x_n)...)) \in G. \tag{35}$$

Заметим, что их образы в группоиде имеют высоту $n + 1$.

Далее, высота наращивается по формуле (34), причем в выражение для элемента высоты h входит хотя бы один элемент высоты $h - 1$ и не входят элементы большей высоты. Высота синтаксического образа элемента правильной алгебры относительно базиса группоида всегда выше высоты самого элемента.

В силу условия единственности разложения в A, синтаксический образ является инъекцией. Заметим, что это всегда не биекция, и многим элементам группоида в синтаксическом образе не соответствует элемент алгебры. Синтаксический образ подалгебры в общем случае не является подгруппоидом.

Рассмотрим обратную задачу. Какие подмножества свободного группоида могут быть синтаксическим образом некоторой алгебраической системы?

Назовем системным подмножеством $C(P, Q, m)$ свободного группоида $G[X]$ где $P, Q \subset X$; $P \cap Q = \emptyset$; $m : Q \to \mathcal{N}$ (отображение в натуральный ряд), индуктивный предел следующей рекуррентной процедуры построения элементов подмножества.

1. $P \subset C(P, Q, m)$.

2. Если $q \in Q$; $n = m(q)$; $y_1, ..., y_n \in C(P, Q, m)$ то
$q(y_1(y_2(...(y_{n-1}y_n)...))) \in C(P, Q, m)$.

Для элемента y системного множества определена высота $h(y)$, равная числу итерраций, необходимых для порождения этого элемента.

Предложение 7.1. *Подмножество свободного группоида является синтаксическим образом правильной алгебры тогда и только тогда, когда оно системное.*

Доказательство. необходимость следует из определения синтаксического образа, поскольку рекуррентная формула (34) задает системное множество.

Для доказательства достаточности построим правильную алгебру $A = (U, F)$, для которой определенное выше системное множество $C(P, Q, m)$ будет синтаксическим образом. Положим $F = Q$; $U = C(P, Q, m)$. Арностью операции $q \in F$ положим $n = m(q)$. Если $y_1, ..., y_n \in U$, то определим
$q(y_1, ..., y_n) = q(y_1(y_2(...(y_{n-1}y_n)...))) \in U$.

Неразложимыми элементами этой алгебры являюся элементы P. И они порождают все U операциями из F по определению системного множества. Докажем единственность разложения. Индукция по высоте элемента $h(y)$, $y \in C(P, Q, m)$.

Если $h(y) = 1$, то $y \in P$ и неразложим. Если $h(y) = 2$, то для некоторых $x_1, ..., x_n \in P$; $q \in F$; $n = m(q)$
$y = q(x_1, ..., x_n) = q(x_1(x_2(...(x_{n-1}x_n)...))) \in U$.

Если имеется второе представление
$y = q'(x'_1, ..., x'_{n'}) = q'(x'_1(x'_2(...(x'_{n-1}x'_n)...))) \in U$,
то $q(x_1(x_2(...(x_{n-1}x_n)...))) = q'(x'_1(x'_2(...(x'_{n-1}x'_n)...)))$

откуда следует посимвльное совпадение двух элементов свободного группоида, а тогда оба представления совпадают.

Допустим, для всех элементов с $h(y) \leq k-1$ доказана единственность разложения. Тогда для элемента y, $h(y)=k$ имеется разложение

$y = q(y_1, ..., y_n) = q(y_1(y_2(...(y_{n-1}y_n)...)))$; $h(y_i < k$, $i = 1, ..., n$.

Но тогда любое другое представление даст в качестве результата тот же элемент свободного группоида, то есть посимвольно совпадет с данным. Индукция завершена.

Следовательно, построена правильная алгебра. Ее синтаксический образ задается тождественным отображением в подгруппоид $G[P \cup Q]$, и совпадает с $C(P, Q, m)$. $\square$

Следствие 3. *Две правильные алгебры, имеющие одинаковый синтаксический образ, изоморфны.*

Действительно, обе они изоморфны алгебре, построенной в предложении 7.1 по их синтаксическому образу, как по системному множеству.

Заметим, что изоморфные правильные алгебры могут иметь формально разные синтаксические образы, например, если у них по-разному обозначены операции или элементы базиса.

7.3. **Синтаксические образы плоских подалгебр.** Пусть дана правильная алгебра $A = (U, F)$ с базисом X, и $M \subset U$ — некоторое подмножество на ее носителе U, а $G = G[F \cup X]$ — группоид, в котором строится синтаксический образ этой алгебраической системы.

Тогда обозначим $g(M)$ минимальный подгруппоид вида $G[F \cup Y]$, содержащий синтаксические образы элементов подмножества M, где $Y \subset U$.

Обозначим $q(M)$ минимальный плоский подгруппоид вида $G[F \cup Y]$, содержащий синтаксический образ подмножества $M \subset U$, где $Y \subset U$.

Если задано подмножество группоида $P \subset G$, то через $a(P) \subset U$ обозначим его прообраз в алгебре A.

Множество элементов подалгебры A' правильной алгебры $A[X]$, обозначим $U_{A'}$.

Предложение 7.2. *Операторы* g, q, a *можно определить следующими равенствами.*

$$g(M) = G(F \cup H(M)) = G(F \cup \{H(y)|y \in M\}); \qquad (36)$$

$$q(M) = \overline{G(F \cup H(M))}; \qquad (37)$$

$$a(P) = H^{-1}(P) = H^{-1}(\{z|z \in P\}) = \{y|H(y) \in P\}. \qquad (38)$$

В общем случае

$$H(M) \subset g(M) \subset q(M); \qquad (39)$$

$$a(P) \subset a(G(P)) \subset a(\overline{G(P)}). \qquad (40)$$

В частности, для подалгебр правильной алгебры:

$$U_{A(Y)} = a(H(U_{A[Y]})) \subset a(g(U_{A[Y]})) \subset G(F \cup H(Y)) \subset a(q(U_{A[Y]})). \qquad (41)$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только выражение для $q(M)$, поскольку другие равенства и неравенства непосредственно следуют из определений.

Пусть $g(M) = G[F \cup Y]$. Поскольку множество F входит в базис G, то его элементы неразложимы и должны войти в базис любого подгруппоида, содержащего $g(M)$, в частности, — в базис $q(M)$. Тогда можно записать

$q(M) = G[F \cup W]$; $\overline{G(F \cup H(M))} = G[F \cup Y']$,

где $W, Y' \subset G \setminus F$. Но тогда плоский подгруппоид $\overline{G(F \cup H(M))}$ удовлетворяет определению подгруппоида $q(M)$. Так как пересечение плоских подгруппоидов является плоским подгруппоидом ранга не большего чем у каждого из исходных, то значение $q(M)$ единственно. Это завершает доказательство. □

Предложение 7.3. *Если* A' *— подалгебра правильной алгебры, то* $r(q(U_{A'})) \leq r(g(U_{A'})) \leq r(A') + \#F$

Неравенства следуют непосредственно из определений с учетом равенств

$$g(U_{A[Y]}) = G(F \cup H(U_{A[Y]})) = G(F \cup H(Y)) \qquad (42)$$

Предложение 7.4. *Если* $x \in U$, $x = f(y_1, ..., y_n)$, $f \in F$ *, то в группоиде* $G[X \cup F]$ *имеется неравенство для высот элементов:* $h(H(x)) > h(H(y_i))$, $i = 1 \dots n$.

Доказательство. В силу единственности разложения и по рекурентной формуле (34) верно равенство

$$h(H(x)) = n + \max\{h(H(y_1)); \dots; h(H(y_n))\} \qquad (43)$$

□

Предложение 7.5. *Если $A[Y]$ подалгебра правильной алгебры $A[X]$ то*

$$U_{A[Y]} = a(g(U_{A[Y]})). \tag{44}$$

Доказательство. Допустим существует $x \in a(q(U_{A[Y]})) \setminus U_{A[Y]}$. Покажем, что этот элемент не может иметь синтаксического образа. Индукция по значению высоты синтаксического образа $h(H(x))$. Пусть $h(H(x)) = 1$. Тогда $x \in X$ и, следовательно, $x \in Y$. Следователно, $x \in U_{A[Y]}$. Значит, $h(H(x)) > 1$. Пусть доказано, что $h(H(x)) > k - 1$ (предположение индукции). Предположим $h(H(x)) = k$. Тогда имеется единственное разложение (34), $x = f(y_1, ..., y_n)$. Тогда, по предложению 7.4 и по предположению индукции все $y_1, \ldots, y_n \in U_{A[Y]}$, но тогда $x \in U_{A[Y]}$. Индукция завершена. $\square$

Предложение 7.6. *Подалгебра $A[Y]$ правильной алгебры $A[X]$ является плоской тогда и только тогда, когда*

$$A[Y] = a(g(U_{A[Y]})) = a(q(U_{A[Y]})). \tag{45}$$

Доказательство. В силу предложения 7.5 достаточно доказать необходимость и достаточноть условия $U_{A[Y]} = a(q(U_{A[Y]}))$.

Необходимость. Пусть $A[Y]$ — плоская подалгебра в $A[X]$. Обозначим $G[F \cup Z] = q(U_{A[Y]})$, где $Z \subset U$. Тогда $\#Z \leq \#Y$ и $U_{A[Y]} \subset U_{A(Z)}$. Следовательно, $Y \subset U_{A[Z]}$. В силу условия единственности разложения, если $Z \neq Y$, то $A[Y]$ не является плоской алгеброй. Значит $Z = Y$. Тогда $q(U_{A[Y]}) = G(F \cup Y)$. Это означает, что $a(q(U_{A[Y]})) = U_{A[Y]}$.

Достаточность. Пусть некоторая подалгебра $A[Z]$ не является плоской. Тогда ее можно строго расширить до плоской подалгебры $A[W]$, $\#W \leq \#Z$. $q(U_{A[Z]}) \subset q(U_{A[W]})$; Но,поскольку $q(U_{A[Z]})$ плоская подалгебра, и $r(q(U_{A[Z]})) \leq r(q(U_{A[W]}))$, то $q(U_{A[Z]}) = q(U_{A[W]})$. Но тогда $a(q(U_{A[Z]})) \setminus U_{A[Z]} \neq \emptyset$. Следовательно, если $a(q(U_{A[Y]})) = U_{A[Y]}$, то $A[Y]$ является плоской алгеброй. $\square$

Таким образом установлено характеристическое свойство плоских подалгебр в терминах синтаксического образа правильной алгебры.

Список литературы

[1] Курош А.. Лекции по общей алгебре. М., "Наука", 1973, 399с
[2] Кон П.. Универсальная алгебра. М., "Мир", 1968, 351с
[3] O. Borüvka. Grundlagen der gruppoid-und gruppenteoria. Berlin, 1966, 198c.
[4] Биркгоф Г. Теория решеток. М.,"Наука", 1984, 568с

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской Академии Наук (НИИСИ РАН); Москва, 117218, Нахимовский пр. 36, корп. 1, т. (095)3324818, e-mail: koganow@niisi.msk.ru