АЛГЕБРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ПОЛЯ: БИСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

В. В. Кассандров, Ж. А. Ризкалла

Кафедра общей физики, Российский Университет дружбы народов,
Орджоникидзе, 3, Москва 117419 Россия, E-mail: vkassan@mx.pfu.edu.ru.

Условия дифференцируемости функций бикватернионого переменого положены в основу алгебраической теории поля. Их необходимыми следствиями являются вакуумные уравнения Максвелла и Янга-Миллса. Условия дифференцируемости могут быть проинтегрированы в твисторных переменых и сводятся к алгебраическим. В работе представлено двухсингуляное решение и его топологические модификации. Соответствующие ему ЭМ-поля представляют собой известное решение Борна и его модификации с сингулярной структурой, имеющей топологию кольца и тора. Обсуждаются общие проблемы алгебродинамического подхода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физика возвращается к своим первоосновам. Она уже не хочет ограничивать себя *описанием* реальности, пусть изящным математически и хорошо экстраполируемым экспериментально. Все чаще речь заходит о самой сущности физических законов, о возможности общего Принципа, лежащего в основе всех без исключения природных процессов.

Все очевидней становится, что такой Принцип может быть выражен лишь на чисто абстрактном математическом языке, представляя собой не что иное, как *программу*, своего рода *"Код Вселенной"*, предопределяющий структуру и эволюцию мира. С этой точки зрения **законы природы следовало бы открывать "на бумаге", а не в лаборатории**. При этом истинный язык природы может оказаться весьма далеким от используемого в современной физике, и о принципе соответствия (в принятом сейчас узком смысле) придется тогда вообще забыть.

Реализация подобной парадигмы затрудняется, конечно, неготовностью большинства физиков отказаться от привычного "ньютононовско-галилеевского" метода познания природы и эклектической смеси классических, квантовых и геометрических представлений, и попытаться строить физику с чистого листа и, буквально, "на листе". Удивительнее другое: сама математика не может пока предложить некоторую действительно *уникальную* структуру, естественным образом генерировавшую бы *неоднородность* и *иерархию* – свойства, столь присущие окружающему нас миру.

Пожалуй, лишь *фрактальные отображения* могут естественным образом воспроизводить простейшие из этих свойств, порождая целый мир "из ничего". Другая возможность, о которой пойдет речь в этой статье, связана с *гиперголоморфными* структурами, а именно с обобщениями условий голоморфности Коши-Римана с ТФКП на исключительные алгебры *кватернионного* типа. На основе (одних лишь!) этих структур оказалось возможным построить своеобразную нелагранжеву теорию поля. При этом *некоммутативность* кватернионных алгебр влечет за собой *нелинейность* обобщенных уравнений Коши-Римана, а вместе с ней и возможность включения физических взаимодействий [1].

Предварительные результаты и некоторые варианты этого подхода, получившего название *алгебродинамики*, были представлены в монографии [3]. В наиболее интересном и изученном случае уравнения, определяющие гиперголоморфные отображения в алгебре *комплексных кватернионов* **B**, редуцируются к виду

$$d\eta = \Phi * dX * \eta, \tag{1.1}$$

где η - 2-спинор, Φ - 2×2-матричное калибровочное поле (подробности см. ниже, п. 2). Система уравнений (1.1) оказалась тесно связанной с фундаментальными уравнениями физики - с *вакуумными* уравнениями Максвелла, Янга-Миллса и Эйнштейна, а также с уравнениями д'Аламбера и эйконала [3]-[6]. А именно, **для каждого решения системы (1) все вышеперечисленные уравнения выполняются тождественно**[2], что уже само по себе не может не удивлять!

Неожиданно оказалось также, что класс *сингулярных* решений самих вакуумных уравнений, в том числе уравнений Максвелла, весьма широк. Помимо известных решений с точечной кулоновской и кольцеобразной особенностями, в последнее время были обнаружены также решения с *тороидальной*, спиралевидной и еще более сложными структурами сингулярностей. Это позволило предложить в рамках модели (1.1) концепцию **частиц как сингулярностей поля** [4, 6] , а их взаимопревращения пытаться связать с *перестройкой* сингулярностей в смысле теории катастроф [2].

Главным при этом, однако, является факт существования самой *нелинейной* и *переопределенной* первичной системы (1.1), определяющей самосогласованным образом как 2-спинор $\eta(x)$, так и калибровочное поле $\Phi(x)$. Для решений системы (1.1) **принцип суперпозиции не имеет места**. Эта система является своеобразным *фильтром*, отбирающим согласующиеся с ней и друг с другом решения различных вакуумных уравнений поля и определяющим тем самым их нетривиальную эволюцию во времени, т.е. взаимодействия и взаимопревращения сингулярностей - частиц.

С другой стороны и в отличие от обычной для теории поля ситуации, переопределенность системы (1.1) (8 уравнений для 6 функций) не позволяет

[1] В отличие от многочисленных попыток построения кватернионного анализа на основе прямых *линейных* обобщений уравнений Коши-Римана

[2] Вакуумные уравнения Эйнштейна выполняются лишь в статическом случае, см. ниже п. 4

произвольно фиксировать даже начальное распределение полей во всем $\mathbf{R^3}$. В полном соответствии с концепцией *суперпричинности* Эйнштейна [1, с.762] этого оказывается достаточно, чтобы уже на классическом уровне имели место определенные "условия квантования" характеристик частиц-сингулярностей, в их числе значений электрического заряда [3, 4, 7, 8]!

Наиболее сложной проблемой является конструирование *многосингулярных* решений и установление общего вида уравнений движения сингулярностей, т.е. их вывод из уравнений поля (1.1). После краткого обзора основных свойств системы (1.1) в п.2 и ее интегрирования в твисторных переменных (п.3) мы алгебраически получаем ранее найденное фундаментальное односингулярное решение (п.4), представляем точное бисингулярное решение системы (1.1) и рассматриваем его модификации (п.5). В заключении (п.6) обсуждаются некоторые общие вопросы алгебродинамического подхода.

2. СВОЙСТВА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений (1.1) (ниже мы будем называть ее *производящей*, ПСУ) представляет собой частный случай условий дифференцируемости функций бикватернионного переменного. Соответствующий этому вариант *некоммутативного анализа* достаточно подробно изложен в работах [3, 4, 7] (там же можно найти и ссылки на более ранние работы). Умножение $(*)$ в формуле (1.1) можно рассматривать как матричное, а поле $\Phi(x)$ - как комплексную 2×2 матрицу, что соответствует известному представлению алгебры бикватернионов $\mathbf{B}$.

При преобразованиях Лоренца

$$X \Rightarrow A^+ * X * A, \quad \det A = 1, \tag{2.1}$$

ПСУ сохраняет свой вид при условии, что величины $\eta(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ (матрица, *присоединенная* матрице $\Phi(x)$) ведут себя как 2-спинор и 4-вектор соответственно:

$$\eta \Rightarrow \bar{A} * \eta, \quad \bar{\Phi} \Rightarrow A^+ * \bar{\Phi} * A. \tag{2.2}$$

ПСУ инвариантна также относительно *слабых* калибровочных преобразований, т.е. преобразований вида

$$\eta \Rightarrow \lambda(\eta)\eta, \quad \Phi_\mu \Rightarrow \Phi_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\lambda(\eta), \tag{2.3}$$

с калибровочным параметром $\lambda(\eta_1, \eta_2)$, зависящим от координат лишь через компоненты *преобразуемого* решения [4, 8].

Таким образом, величины $\Phi(x)$ могут рассматриваться как 4-потенциалы некоторого комплекснозначного *абелева* калибровочного поля. Динамические ограничения на это поле следуют из обращения в нуль частных производных для коммутаторов производных и имеют вид *условий комплексной самодуальности* [3, 4]

$$\vec{E} + i\vec{H} = 0 \tag{2.4}$$

для $\mathbf{C}$-значных напряженностей поля, соответствующих потенциалам $\Phi_\mu(x)$. Вследствие соотношений (2.4) и отдельно для действительных и мнимых составляющих полей $\vec{E},\vec{H}$ тождественно выполняются вакуумные уравнения Максвелла. Поэтому $\mathbf{C}$-значное поле $\Phi(x)$ на самом деле описывает *пару* обычных электромагнитных полей, дуально сопряженных друг другу.

Удивительно, однако, что то же поле $\Phi(x)$ допускает и параллельную интерпретацию [4, 6]. Действительно, левая $\mathbf{B}$-связность

$$\Gamma(x) = \Phi(x) * dX \equiv \Gamma^0(x) + \Gamma^a(x)\sigma_a \tag{2.5}$$

естественным образом определяет напряженность некоторого комплексного калибровочного поля

$$F(x) = d\Gamma(x) - \Gamma(x) \wedge \Gamma(x). \tag{2.6}$$

Часть $\Gamma^0(x) = \Phi_\mu(x)dx^\mu$ отвечает ранее рассмотренному электромагнитному полю. В то же время часть $\Gamma^a(x)$ связности (2.5), выражающаяся через те же величины Φ_μ, при преобразованиях (2.3) ведет себя как некоторое $SL(2,C)$-калибровочное поле, и вследствие соотношений самодуальности (2.4) **тождественно удовлетворяют свободным уравнениям Янга-Миллса** [4]. Заметим, что напряженности электромагнитного $F^0_{[\mu,\nu]}$ и Янг-Миллсовского $F^a_{[\mu,\nu]}$ полей связаны при этом динамически соотношением

$$F^a_{[\mu,\nu]}F^a_{[\mu,\nu]} = (F^0_{[\mu,\nu]})^2 \tag{2.7}$$

(суммирование только по изотопическому индексу $a = 1,2,3$), которое отличается от обычно принятой в теории поля неинвариантной связи.

С другими свойствами ПСУ (1.1), в том числе с геометрической интерпретацией связности (2.5) как связности *Вейля-Картана* специального вида, можно ознакомиться по работам [4, 7, 8].

3. ТВИСТОРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПСУ

Уравнения (1.1) могут быть записаны в 2-спинорной форме

$$\nabla^{AA'}\eta^{B'} = \Phi^{B'A}\eta^{A'}, \quad A, A', B' = 1, 2, \tag{3.1}$$

где $\nabla^{AA'}$ обозначает производную по соответствующей спинорной координате $X_{AA'}$. При умножении на ортогональный спинор $\eta_{A'}{=}\varepsilon_{A'C'}\eta^{C'}$ потенциалы $\Phi^{B'A'}$ исключаются, и мы приходим к **обобщенным нелинейным уравнениям Коши-Римана**, связывающим компоненты спинора $\eta(x)$:

$$\eta_{A'}\nabla^{AA'}\eta^{B'} = 0. \tag{3.2}$$

Решение уравнений (3.2) может быть выражено через *твисторные переменные*

$$\tau_A = X_{AA'}\eta^{A'} \tag{3.3}$$

в неявном относительно компонент спинора $\eta(x)$ виде

$$\Psi^{(C)}(\eta,\tau)=0, \quad C=1,2, \tag{3.4}$$

где $\Psi^{(1)},\Psi^{(2)}$ - две произвольные голоморфные функции 4-х комплексных переменных $\eta^{1'},\eta^{2'},\tau_1,\tau_2$, и компоненты τ зависят от η через твисторное уравнение (3.3).

Разрешив уравнения (3.4) относительно компонент спинора $\eta^{1'},\eta^{2'}$ и подставив их в (3.1) можно определить потенциалы $\Phi^{C'A}(x)$ и через них электромагнитное и Янг-Миллсовское поля, отвечающие решению системы (3.2).

Нас в первую очередь будут интересовать *сингулярности* этих полей: их топологическая структура, электрический заряд и эволюция во времени. Дифференцируя (3.4), нетрудно показать, что *каустикам*, на которых поля обращаются в бесконечность, отвечает условие вида

$$\det \| \frac{d\Psi^{(C)}}{d\eta^{B'}} \| = 0. \tag{3.5}$$

Для дальнейшего заметим, что решение системы (3.4) упрощается выбором калибровки $\eta^{1'}{=}1$. При этом первое из соотношений (3.4) тривиально: $\Psi^{(1)}{=}\eta^{1'}-1{=}0$ а единственная остающаяся компонента спинора $\eta^{2'} \equiv G(x)$ алгебраически определяется вторым соотношением (3.4)

$$\Psi^{(2)}(\eta^{2'},\tau_1,\tau_2) \equiv \Psi(G,\ wG+u,\ vG+\bar{w})=0, \tag{3.6}$$

где для спинорных координат введены обычные обозначения $u,v=X_{11'},X_{22'}=t\pm z$, $w,\bar{w}=X_{12'},X_{21'}=x\pm iy$. Условие каустики (3.5) также принимает более простой вид

$$\frac{d\Psi}{dG}=0. \tag{3.7}$$

На самом деле в вышерассмотренной калибровке уравнения (3.2) сводятся к хорошо известным в ОТО соотношениям, определяющем изотропные *бессдвиговые геодезические конгруенции* (БСК), причем их решение в виде (3.6) представляет собой содержание *теоремы Керра* ([9, Глава 7]). Таким конгруенциям естественно сопоставляется метрика типа Керра-Шилда [6, 10, 11], причем **условие (3.7) определяет сингулярности кривизны этой метрики** [12, 13].

Таким образом, сингулярности электромагнитного, Янг-Миллсовского и гравитационного полей, однозначно сопоставляемых решениям ПСУ (1.1), определяются одним и тем же условием (3.7). Поэтому совершенно естественной представляется принимаемая в нашем подходе интерпретация **частиц как общих сингулярностей этих полей**.

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ОДНОСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ПСУ

Выбор простейшей линейной зависимости неявной функции $\Psi(G,\tau_1,\tau_2)$ в (3.6) от своих аргументов приводит к тривиальному решению для $G(x)$, для которого напряженности полей тождественно обращаются в нуль. *Статические аксиально-симметричные* решения (1.1) исчерпываются функциями (3.6) вида

$$\Psi = G\tau_1 - \tau_2 - cG = 0, \quad c = Const,$$

или эвивалентно,

$$G(wG + u) - 2cG - (vG + \bar{w}) = 0. \tag{4.1}$$

Разрешая квадратное уравнение (4.1), получим решение в явном виде

$$G(x) = \frac{\bar{w}}{(z-c) \pm \sqrt{(z-c)^2 + \rho^2}}, \tag{4.2}$$

где $z = (u - v)/2$, $\rho^2 = w\bar{w} = x^2 + y^2$. При действительном c, значение которого можно с точностью до трансляции положить равным нулю, решение (4.2) геометрически отвечает *стереографической проекции* $\mathbf{S^2} \mapsto \mathbf{C}$, а соответствующее ему электрическое поле имеет кулоновский вид с точечной сингулярной особенностью

$$E_r = \frac{q}{r^2}, \quad q = \pm 1; \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \tag{4.3}$$

причем **значение электрического заряда может иметь только строго фиксированную по модулю величину** (т.н. *алгебраическое квантование заряда*, см. [3, 4, 7, 8]). Соответствующее магнитное поле *чисто мнимо* и имеет аналогичный (4.3) *монопольный* вид

$$H_r = \frac{i\mu}{r^2}, \quad \mu = q = \pm 1; \quad H_\theta = H_\varphi = 0. \tag{4.4}$$

В случае мнимых значений константы $c = ia$, $a \in \mathbf{R}$ сингулярность соответствующего (4.2) ЭМ-поля имеет вид *кольца* радиуса $|a|$. При больших $r \gg |a|$ поле, сохраняя в качестве основных членов кулоновско - монопольную асимптотику (4.3),(4.4), приобретает также характерную *мультипольную* структуру, что даже позволяет сделать оценки величины квадрупольного электрического момента отвечающей решению (4.2) частицы [6] .

Риманова метрика, сопоставляемая через БСК решению (4.2), имеет вид метрики Шварцшильда для случая действительных значений , и метрики Керра для случая мнимых значений этой константы [10]. В работе [11] показано, что этим **исчерпываются статические решения (3.6), сингулярная структура кривизны (а в нашем подходе - и ЭМ-полей) которых ограничена в 3-пространстве**. Примечательно, что эти решения автоматически удовлетворяют как вакуумным уравнениям Эйншнейна, так и электровакуумной системе Максвелла-Эйнштейна. Действительно, тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ для комплексных автодуальных ЭМ-полей, удовлетворяющих условияю (2.4), тождественно равен нулю! С другой стороны, уравнения Максвелла в рассматриваемых пространствах не отличаются от плоского случая [10].

5. ДВУХСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ПСУ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Рассмотрим теперь зависящие от времени аксиально-симметричные решения, генерируемые функцией (3.6) вида

$$\Psi = \tau_1\tau_2 + b^2 G = 0, \quad b = Const \in \mathbf{C}\,.$$

что также приводит к квадратному уравнению и к следующему его решению для основной функции $G(x)$:

$$G = \frac{-2u\bar{w}}{\sigma^2+\rho^2+b^2 \pm \sqrt{\Delta}}, \qquad \Delta \equiv (\sigma^2+\rho^2+b^2)^2 - 4\sigma^2\rho^2, \tag{5.1}$$

где $\sigma^2 = uv = t^2 - z^2$.

Каустика для решения (5.1) соответствует обращению в нуль дискриминанта $\Delta = 0$, преобразуя который получим *уравнение эволюции сингулярностей* в виде

$$\Delta = (t^2 - z^2 - \rho^2 + b^2)^2 + 4b^2\rho^2 = 0. \tag{5.2}$$

В случае действительных значений константы b из (5.2) немедленно получаем

$$\rho = 0, \quad z = \pm\sqrt{t^2+b^2}, \tag{5.3}$$

т.е. в этом случае структура поля имеет *две точечные сингулярности*, совершающие зеркальное *гиперболическое* движение вдоль оси Z (Рис.1а,б,в) Вычисляя потоки векторов напряженности ЭМ-поля через замкнутую поверхность, окружающую каждую из сингулярностей, легко убедиться, что обе они имеют равный и противоположный по знаку заряд, и что **значение заряда снова оказывается фиксированным и равным заряду односингулярного решения!**

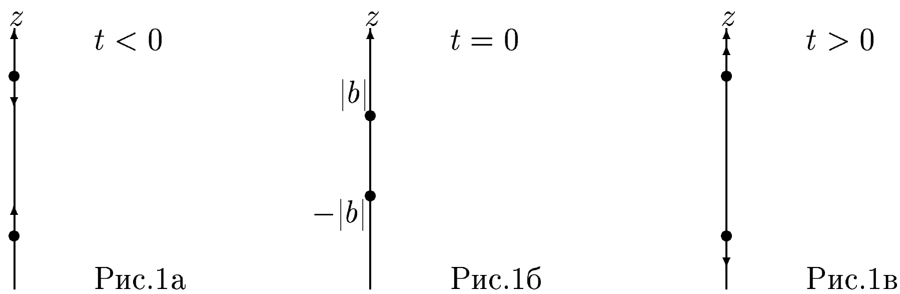

Рис.1а Рис.1б Рис.1в

Сами ЭМ-поля (точнее, их действительные части $\Re\vec{E}, \Re\vec{H}$) имеют структуру известного *решения Борна* для полей равноускоренного заряда ([16, с.136])

$$E_\rho = \mp\frac{8b^2\rho z}{\Delta^{3/2}}, \quad E_z = \pm\frac{4b^2}{\Delta^{3/2}}(t^2 - z^2 + \rho^2 + b^2), \quad H_\varphi = \mp\frac{8b^2\rho t}{\Delta^{3/2}}, \tag{5.4}$$

остальные компоненты тождественно равны нулю.

В литературе существуют самые разнообразные интерпретации решения (22) и связанной с ним проблемы излучения равноускоренного заряда, причем в большинстве работ появление второй зеркальной сингулярности попросту игнорируется [24]-[28]. Что касается излучения, то в последнее время вновь возродился интерес к этой проблеме [20]-[22], и появились высокого уровня работы, в которых строго доказывается его отсутствие в этом случае [18, 19].

Наши взгляды близки к излагаемым в статьях Сингала, однако мы не имеем возможности вступать здесь в дискуссию по этой старой и запутанной проблеме. Отметим лишь, что появление второй сингулярности представляется нам неизбежным следствием и фундаментальным свойством самих уравнений Максвелла (см. также в этой связи работу [25]). Сам процесс (Рис.1) можно рассматривать как некоторую "игрушечную" модель *упругого рассеяния* двух взаимодействующих частицеподобных образований. При этом взаимодействие, как ни странно, имеет неэлектромагнитную природу (вместо притяжения - отталкивание!), а электрический и магнитный заряды сингулярностей имеют здесь функцию не констант связи, а лишь источников поля и сохраняющихся квантовых чисел [3].

Такая интерпретация может быть подтверждена рассмотрением обнаруженных нами *модификаций* решения Борна, связанных с комплексными значениями константы $b^2 = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ в (5.1) [4]. В этом случае (предполагая $\alpha, \beta \neq 0$) имеем следующие соотношения для сингулярностей:

$$\rho = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}, \quad z = \pm\sqrt{t^2 + \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \tag{5.5}$$

Таким образом, опять сингулярности совершают гиперболическое движение вдоль оси Z, но имеют *кольцевую структуру* с фиксированным радиусом ρ (5.5). Тем же путем, как в случае действительной константы b мы находим, что они обладают противоположными зарядами, равными по абсолютной величине фундаментальному.

Случай чисто мнимых констант $b = ia,\ a \in \mathbf{R}$ требует особого рассмотрения. Из (5.2) имеем следующее условие для каустики:

$$z^2 + (\rho \pm a)^2 = t^2. \tag{5.6}$$

Это на первый взгляд простое уравнение описывает весьма нетривиальную эволюцию сингулярностей. Действительно, при $t = 0$ имеем снова кольцо радиуса $|a|$ (Рис.2а), которое при $t > 0$ превращается в *тор* с радиусом сечения R, возрастающим со световой скоростью $R = t$ (Рис.2б) (на рисунках представлены сечения этих фигур плоскостью, проходящей через ось симметрии Z). При $t = |a|$ "дырка" тора закрывается (Рис.1в), и в тот же момент в начале координат появляется вторая сингулярность, соответствующая положительному знаку в (5.6).

---

[3] Заметим, однако, что при этом *эффективный* заряд [17] $\sqrt{q^2 + (i\mu)^2}$, как и в односингулярном случае (ср. с (4.4)), тождественно равен нулю, что формально оправдывает отсутствие ЭМ-взаимодействия!

[4] Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь по-прежнему идет о решениях обычных *действительных* уравнений Максвелла.

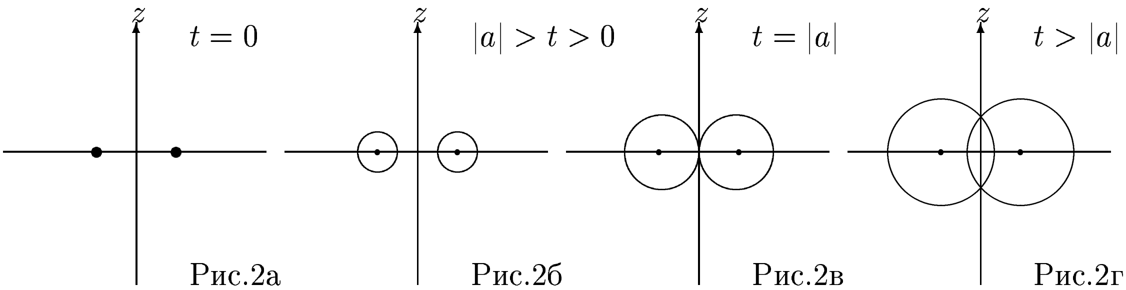

Рис.2а Рис.2б Рис.2в Рис.2г

При $t > |a|$ тор продолжает расширяться, пересекая "сам себя", и сингулярность имеет вид 2-х тороидальных "мостиков", соединяющих их общие точки с координатами

$$\rho = 0, \quad z = \pm\sqrt{t^2 - a^2} \tag{5.7}$$

(соответствующее сечение представлено на Рис.1г). При больших $t \gg |a|$ закон движения этих сингулярностей приближается к закону движения точечных сингулярностей решения Борна (5.3).Однако их скорость $V = dz/dt$ уменьшается при этом от ∞ до скорости света, так что соответствующий процесс можно рассматривать как разлетание двух *тахионо-подобных* образований. На интервале времени от $t = -\infty$ до $t = 0$ имеем обратный процесс все ускоряющегося сближения двух тахионов (соединенных сингулярными "мостиками"), вплоть до их *аннигиляции* при $t = -|a|$ с образованием тороидальной *резонансной* структуры и ее вырождения в сингулярное кольцо радиуса $|a|$ при $t = 0$. В этот момент конфигурация электрических линии испытывает претерпевает изменение топологии с изменением знака коэффициента зацепления на противоположный.

Заметим, что асимптотически при $|t| \gg |a|$ поле "тахионного" решения совпадает с полем решения Борна для точечных сингулярностей для всех продольных направлений, определяемым углами $\theta \ll \pi/2$ (т.е. вдалеке от направлений на сингулярных "мостики"). Это позволяет рассматривать тахионоподобные точечные особенности (5.7) как своеобразные "квазизаряды", причем величина каждого из зарядов оказывается снова равной заряду фундаментального решения.

Метрика, соответствующая этому решению ПСУ, является метрикой типа Керра-Шилда,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h e^3_\mu e^3_\nu \tag{5.8}$$

где $e^3 = du + G dw + \bar{G} d\bar{w} + G\bar{G} dv$ - изотропная 1-форма.
Для действительных констант b по аналогии с [14, 15] имеем метрику с функцией

$$h = \frac{m\partial_u \bar{G}}{\bar{\tau}_2(\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)^2}, \quad m \equiv m(\bar{\tau}_1) \tag{5.9}$$

удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна с тензором изотропного излучения $T_{\mu\nu} = P_{33} e^3_\mu e^3_\nu$, где P_{33}

$$P_{33} = 2\frac{(\dot{m}(\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)\bar{\tau}_1 + 3m(\bar{\tau}_1 + G\bar{\tau}_2))(\bar{\tau}_2 \partial_u \bar{G})^2}{(\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)^3}, \quad \dot{m} = \frac{dm}{d\bar{\tau}_1}. \tag{5.10}$$

Заметим, что бессдвиговая конгруенция, определяемая функцией G в (5.1), имеет нулевое вращение (т.е чистое расширение). Решение (5.1) описывает искривленное пространство, заполненное изотропным излучением. ЭМ-поля являются в некотором смысле *пробными*, поскольку их вклад в тензор энергии-импульса в силу условий комплексной самодуальности (2.4) отсутствует.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ВЗАИМОПРЕВРАЩЕНИЕ ЧАСТИЦ В БИКВАТЕРНИОННОЙ ПОЛЕВОЙ ДИНАМИКЕ

Сведение ПСУ (1.1) к решению алгебраического уравнения БСК (3.6) (или к уравнению (3.4) в произвольной калибровке) позволяет достаточно легко генерировать сложные решения ПСУ и отвечающие им решения уравнений Максвелла и (**C**-значных) уравнений Янга-Миллса. К настоящему времени, помимо вышепредставленных решений, изучены (В.Н.Тришиным) незаряженные "фотоноподобные" структуры со *спиралевидной* сингулярностью, распространяющейся вдоль некоторого направления со скоростью света, а также ряд других решений волнового типа. Широкий класс сингулярных решений уравнений Максвелла приведен в монографии [23], однако остается открытым вопрос о возможности их согласования с основной ПСУ (1.1).

Для более сложных распределений наиболее интересная их характеристика - уравнение структуры сингулярности и закона ее эволюции - может быть получена и без явного решения уравнения (3.6). Действительно, исключая основную функцию $G(x)$ из двух уравнений (3.6),(3.7), приходим непосредственно к уравнению сингулярной поверхности (или кривых, или точек в вырожденных случаях). Примеры таких сложных сингулярных множеств будут опубликованы отдельно.

Тем не менее две главные задачи, естественно возникающие при анализе свойств ПСУ (1.1) - вывод общего уравнения движения сингулярностей и их полная классификация - пока еще не решены и, судя по всему, требуют весьма тонких математических методов. При этом в силу переопределенности ПСУ начальные данные задачи Коши можно произвольным образом задавать лишь на некоторой *2-мерной поверхности*, а не во всем 3-пространстве, поскольку эволюция решения по третьей координате определяется, как и по времени, самими уравнениями (1.1).

Что касается задачи классификации сингулярностей и связанной с ней задаче о допустимых перестройках особенностей, то по крайней мере для вакуумных уравнений Максвелла они, надо думать, будут в скором времени решены в рамках быстро развивающейся общей *теории катастроф* [2]. Отождествление особенностей с элементарными частицами, вообще говоря, напрашивается само собой. Для физиков, однако, такой подход непривычен, поскольку сингулярности обычно связываются там с расходимостями интегральных характеристик (собственной энергии и др.). В рассматриваемом здесь нелагранжевом подходе видно, что эта трудность на самом деле может иметь фиктивный характер, ибо **как квантовые числа, так и закон движения сингулярностей однозначно определяются самими решениями уравнений поля.**

На самом деле, мы имеем здесь дело с совершенно новым подходом и к самой нелинейной электродинамике; с подходом, в котором вместо видоизменения самих уравнений Максвелла мы рассматриваем их как тождественные следствия некоторой преддинамики.

Таким образом, за компактной и вытекающей из единого принципа(гиперголоморфности полевых функций) ПСУ (1.1) скрывается целый мир структур, во многих отношениях напоминающий реальный. После необходимой интерпретации матаматических величин, язык теории оказывается удивительно близким (но не тождественным!) к используемому в традиционной теории поля.

Более того, некоторые факты, например квантование электрического заряда, описываются рассматриваемой ПСУ гораздо более естественно и адекватно, чем это имеет место в общепринятых теоретико-полевых схемах. С другой стороны, подлинные возможности ПСУ по описанию структуры и взаимодействия частиц еще предстоит выяснить. Разумеется, мы не рассматриваем ПСУ (1.1) как некую *окончательную* математическую стуктуру, кодирующую "Теорию Всего". Однако уже обнаруженные уникальные ее свойства позволяют считать эту систему удачной и впечатляющей демонстрацией общих принципов алгебродинамического подхода.

Заметим, что рассматриваемая схема допускает естественные обобщения на алгебры более высокой размерности, на *"локальные алгебры"* со структурными коэффициентами, зависящими от точки [3, Глава 2], а также на неассоциативные алгебры типа октонионов. Все эти обобшения представляются достаточно перспективными.

Авторы признательны Ю. С. Владимирову, Ц. И. Гуцунаеву, Д. П. Желобенко и Ю. П. Рыбакову за полезные советы и интерес к работе. Один из нас (В. К.) благодарен А. В. Аминовой и Д. А. Калинину и другим организаторам школы-семинара "Волга-10" за теплый прием, а ее участникам, персонально В. Г. Багрову и А. П. Широкову - за стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] А. Эйнштейн, “Собрание Сочинений” Т.3, Москва, Наука, 1965.

[2] В. И. Арнольд, “Сингулярности Каустик и Волновых Фронтов”, Москва, Математика, 1996.

[3] В. В. Кассандров, “Алгебраическая Структура Просранства-Времени и Алгебродинамика”, Москва, Изд-во Российского Университета Дружбы Народов, 1992.

[4] V. V. Kassandrov, *Grav. & Cosm.* **1**, № 3, 216, 1995.

[5] В. В. Кассандров, *Вестник Рос. Унив. Дружбы Нар., Физика* **1**, 59, (1993).

[6] V. V. Kassandrov, J. A. Rizcalla, Particles as singularities within the unified algebraic field dynamics, *in* Proc. Int. Conf. “Geometrization of physics III”, Kazan, Kazan Univ. Press, 1997 (in print).

[7] V. V. Kassandrov, *Acta Applic. Math.* **50**, 197, 1998.

[8] В. В. Кассандров, Дж. А. Ризкалла, Ковариантно-постоянные пола и геометризация электромагнетизма, *в* Труд. Межд. Конф. “Геометризация Физики II”, Казань, Изд-во КГУ, 1996, с.137.

[9] Р. Пенроуз, В. Риндлер, “Спиноры и Просранство-Время” Т.2, Москва, Мир, 1988.

[10] G. Debney, R. P. Kerr, A. Schild, *J. Math. Phys.* **10**, 1842, (1969).

[11] R. P. Kerr, W. B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 273, (1979).

[12] A. Burinskii, String-like structures in complex Kerr geometry, *in* "Rep. on IV Hungar. Relat. Workshop", Gárdony, 1992.

[13] А. Я. Буринский, *Проблемы Теории Гравитации и Элементарных Частиц* **11**, 47, 1980.

[14] A. Burinskii, R. P. Kerr, Z. Perjés, (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9501012).

[15] W. Kinnersley, *Phys. Rev.* **186**, 1335, (1969).

[16] В. Паули, "Теория Относительности", Москва, Наука, 1965.

[17] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, "Электродинамика с Магнитным Зарядом", Минск, Изд-во БГУ, 1985.

[18] A. Singal, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 953, (1995).

[19] A. Singal, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1371, (1997).

[20] C. S. Ng, *Phys. Rev.* **E47**, 2048, (1993).

[21] S. Parrott, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1463, (1997), (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9711027).

[22] Amos Harpaz, Noam Soker, (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9805097).

[23] Г. Бейтмен, "Математическая Теория Распространения Электромагнитных Волн", Москва, Физматгиз, 1958.

[24] G. D. Boulware, *Ann. of Physics* **124**, 169, (1980).

[25] C. Leibovitz, A. Peres, *Ann. of Physics* **9**, 499, (1960).

[26] В. Л. Гинзбург, *Усп. Физ. Наук* **98**, Вып.3, 569, (1969).

[27] F. Rohrlich, *Ann. of Physics* **22**, 169, (1963).

[28] N. Rosen, *Ann. of Physics* **17**, 269, (1962).