АЛГЕБРОДИНАМИКА: КВАТЕРНИОНЫ, ТВИСТОРЫ, ЧАСТИЦЫ

В.В. Кассандров
Кафедра общей физики,
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, e-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Аннотация

Представлены основные принципы и результаты алгебродинамического (АД) подхода к теории поля, в котором уравнения физических полей следуют из нелинейных *обобщенных уравнений Коши-Римана* (ОУКР) - условий дифференцируемости функций бикватернионного переменного. Частицы рассматриваются как сингулярности (точки, струны, мембраны) соответствующих функций-полей; их форма и временная эволюция определена первичными ОУКР, а электрический заряд оказывается квантованным. АД-подход тесно связан с твисторными структурами Пенроуза и с теорией особенностей Тома - Арнольда. Обсуждаются свойства возникающих в теории *условий комплексной самодуальности*: их связь с уравнениями Максвелла и Вейля, с условием квантования электрического заряда и с проблемой магнитного монополя.

The algebrodynamics: quaternions, twistors, particles

Vladimir V. Kassandrov
Department of General Physics,
Peoples' Friendship University of Russia,
117198, Moscow, Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., e-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Аннотация

We present basic principles and advances of the *algebrodynamical* (AD) approach to field theory in which the conventional field equations follow from nonlinear *generalized Cauchy-Riemann equations* (GCRE) – the differentiability conditions for the functions of biquaternionic variable. Particles are considered as singularities (points, strings, membranes) of corresponding functions-fields; their shape and time evolution are completely determined by the original GCRE, and the electric charge is quantized. AD-approach is deeply related to Penrose twistor structures as well as to Thom-Arnold' theory of singularities. We discuss also *the conditions of complex self-duality* arising in theory: their relations to Maxwell and Weyl equations, to the quantization of electric charge, and to the magnetic monopole problem.

Введение

1. Существует две различные системы взглядов на природу частиц, полей и взаимодействий. Первая из них считает язык квантовой теории первичным, истинным языком Природы, для более глубокого понимания которого надо еще в большей степени отказаться от неадекватных в микромире классических представлений.

Другая система взглядов рассматривает возможность сохранения пространственно-временной динамики и языка классической теории поля при описании свойств элементарных частиц, а квантовые явления связывает с нелинейными (взаимодействия и реакции), топологическими (дискретность характеристик и устойчивость) и стохастическими (корпускулярно-волновой дуализм и принцип неопределенности) свойствами.

Такие представления (можно назвать их парадигмой *нелинейной классической теории поля*) вполне созвучны с современными идеями о многомерности пространства-времени (в теории струн и теориях Калуцы-Клейна) и с гипотезой о чисто геометрическом происхождении всех физических полей (единые теории Вейля-Эйнштейна, геометродинамика Райнича-Уилера, отчасти многомерные и струнные теории) . Наряду с имеющими уже очевидно важную роль нелинейно-топологическими структурами (солитоны, инстантоны, вихри) все эти концепции в своей основе *чисто классичны*, и лишь эклектично сочетаются с квантовыми представлениями.

сической, и этот процесс будет, скорее всего, продолжаться и далее. Действительно, развитые в ней алгоритмы расчетов, связанные с использованием *линейных структур* и позволяющие эффективно учесть нелинейность через процедуру вторичного квантования и теорию возмущений, во многом уже исчерпаны. Это означает, что квантовая теория будет вынуждена обратиться (и этот процесс уже давно идет) к точным методам анализа сложных нелинейных систем уравнений для взаимодействующих полей, т.е. по существу вернуться к решению основной и технически сложной проблемы классической теории поля. Однако, несмотря на все усилия, систематических методов интегрирования реалистических систем уравнений взаимодействующих полей до сих пор не разработано (точно интегрируемые модели к фундаментальным уравнениям, как правило, не относятся). К выбору альтернативы (между квантовыми и классическими представлениями) поэтому имеет смысл вернуться лишь после получения сложных (например, многосолитонных) решений в реалистических моделях и анализа их внутренних свойств *as they are* (о солитонной интерпретации барионов в модели Скирма см., например, работы [1, 2]; о солитонах в модели Максвелла-Дирака – работу автора [3]).

Среди современных методов интегрирования дифференциальных полевых уравнений наиболее впечатляют методы, связанные со сведением их решений к решению *чисто алгебраических* задач. Эта программа "алгебраизации" была впервые реализована в работах [6] и затем [7] на примере самодуальных решений уравнений Янга-Миллса, а в работе [8] - для нахождения важного класса решений электровакуумной системы Эйнштейна-Максвелла. В работе [9] предпринималась попытка свести нелинейную систему уравнений для взаимодействующих дираковского и ЯМ полей к уравнениям Коши-Римана. Не входя в детали, отметим лишь, что возможность алгебраизации этих систем оказалась связанной с существованием у них скрытой симметрии - *твисторной структуры*. Твисторы, введенные в рассмотрение Р. Пенроузом [10], по-видимому, действительно являются фундаментальным объектом, тесно связанным с геометрией физического пространства-времени Минковского (а возможно, и первичным по отношению к нему). Мы будем существенно использовать твисторы в данной работе.

3. Интересным открытием последнего времени явилось обнаружение новых классов регулярных решений у уравнений Янга-Миллса (инстантоны), Янга-Миллса-Хиггса (монополь т'Хофта-Полякова), Эйнштейна (гравитационные инстантоны). Однако самым неожиданным представляется открытие новых классов решений у, казалось бы, изученных "вдоль и поперек" линейных (вакуумных) уравнений Максвелла (УМ). Тем не менее, в работах А. Ф. Раньяды [12] был обнаружен класс т.н. *knot-like solutions* ("заузленных решений") с нетривиальной топологией (соответствующий "заряд" автоматически квантован и интерпретируется как спиральность). В наших работах [47, 51] получен большой набор решений вакуумных УМ с разнообразной структурой сингулярного множества (0-, 1- и 2-мерного) и нетривиальной динамикой. Значительное число таких решений локализовано в 3-пространстве и, как солитоны, могут при определенных условиях (см. ниже) рассматриваться в качестве *частицеподобных* образований.

В обоих подходах УМ рассматриваются не сами по себе, а как тождественные следствия некоторой первичной нелинейной системы полевых уравнений (концепция т.н. "скрытой нелинейности" [11]). Существование такой "надсистемы" отбирает некоторый подкласс из всего множества решений УМ (прочие удовлетворяют УМ, но не удовлетворяют более жесткой первичной системе). Только этот подкласс и является "физическим" с точки зрения рассматриваемого подхода. Нелинейность первичной системы при этом предопределяет наличие некоторых жестких "правил отбора" как на начальные полевые распределения, так и на их временну́ю эволюцию. Первое свойство (в сочетании с *переопределенностью* первичной системы – идея, принадлежащая А. Эйнштейну [13] – приводит к возможности на чисто классическом уровне рассмотрения "заработать" дискретный спектр физических характеристик частицеподобных объектов (в обсуждаемых подходах – целочисленность электрического заряда, см. раздел 4). Что же касается динамики, то несмотря на линейность самих УМ, нелинейность первичной системы нарушает принцип суперпозиции и предопределяет нетривиальный характер временной эволюции частицеподобных объектов, моделирующий их "взаимодействие" и даже взаимопревращение, в том числе с изменением топологических характеристик.

Таким образом, в подходах, использующих концепцию "скрытой нелинейности", *в отличие от обычных схем нелинейной электродинамики, вакуумные УМ выполняются абсолютно*, во всем проместо все черты и преимущества, свойственные существенно нелинейным моделям.

4. Важно понимать, что ни выбор в пользу моделей со скрытой нелинейностью, ни какие-либо другие *априорные* установки сами по себе не определяют математический тип решений, ассоциируемых с частицами: термин ”частицеподобное” употреблен выше в самом широком смысле и предполагает только а) ограниченность полевого распределения в пространстве в каждый конечный момент времени и б) его известную устойчивость, т.е сохранение структуры распределения на протяжении некоторого конечного интервала времени (вплоть до ухода на бесконечность или превращения в другую(ие) аналогичные структуры). Иначе говоря, в принципе можно описывать частицу с помощью решений *солитонного* типа. Можно сделать выбор и в пользу модели частицы как протяженного, но ограниченного в 3-пространстве *сингулярного* образования; известно, что именно такой интерпретации придерживался Л. де Бройль и А. Эйнштейн в первой половине жизни (в конце он перешел в ”солитонную” религию). Наконец, вполне вероятно, что наиболее близкими к реальности окажутся те модели, которые сейчас кажутся экзотическими, в частности модели с *фрактальной* структурой полевого распределения и/или самого пространства-времени (ПВ).

5. Неоднозначность в выборе решений, отвечающих элементарным микрообъектам, не является, впрочем, фундаментальной (в принципе, могут даже использоваться различные их типы в рамках одной и той же модели). Главной проблемой как в рамках квантовой, так и классической парадигмы является *полная неопределенность в выборе самих исходных уравнений* и общих принципов, на основе которых их следует отбирать. Из всего богатства возможностей, предлагаемых современной математикой, в физике используется по существу лишь все та же вариационная процедура вывода уравнений и два общих принципа отбора – релятивистская и калибровочная инвариантность. Более того, все используемые в настоящее время уравнения, несмотря на математическую красоту и успешные применения, *недостоверны* и в известной мере случайны, поскольку не *получены* из некоторого единого принципа, а *придуманы* с целью наиболее эффективного описания экспериментов. Их недостоверность связана с отсутствием уверенности в том, что именно известные на сегодня уравнения предлагают единственно возможный язык для описания Природы, и что не существует другого языка, более адекватного действительной структуре Вселенной. Никакие новые эксперименты и никакие усовершенствования известных теоретических подходов, концепций и уравнений не способны приблизить нас к пониманию этой структуры, хотя и могут сделать более простым и полным описание ее наблюдаемых свойств. По Платону, мы ловим только *тени* истинных свойств и первичных структур Мироздания.

6. Где же выход? Возможно, он состоит в том, чтобы искать сам основной принцип, Код Вселенной, безотносительно к задачам описания конкретного класса явлений и по возможности *забыв на время общепринятый язык теоретической физики и даже сами известные нам свойства окружающего мира.* Этот Принцип может быть сформулирован только на языке Чисел, на языке абстрактных математических структур (другого пригодного языка мы просто не знаем!). Такие первичные структуры *должны быть исключительными* по своим внутренним свойствам, и наша задача состоит в том, чтобы *раскрыть* их в полной мере, не добавляя по дороге ничего ”от себя”, с целью их подгонки под наблюдаемые, внешние явления [4]. Только в этом случае и через них мы можем прикоснуться к действительной, внутренней сущности устройства Вселенной. В.И.Арнольд образно выразил эти взгляды, заметив, что в математике мы ставим такие же эксперименты над числами, функциями или пространствами, как физики над частицами, только математические эксперименты дешевле и безопаснее. К этому осталось только добавить, что именно законы объективно существующих математических структур и предопределяют законы физического мира (по существу и *есть* эти законы!). В этом случае говорить о какой-то ”непостижимости” математики в естественных науках [14] уже не приходится.

6. Серьезных попыток построения физических теорий, основанных на подобных ”неопифагорейских” представлениях, не так уж много, и до сих пор они не привели к каким либо значительным успехам. Помимо уже отмеченной выше работы Ю. И. Манина, следует сказать о работах А. Эддингтона [15] (теория Е-чисел), Д. Хестенеса [16] (алгебра ПВ), Ю. И. Кулакова [17] и Ю.С. Владимирова

в последние годы жизни.

Во многих работах подобного рода в основу построения закладывались свойства замечательной алгебры, открытой У. Гамильтоном в 1843 году - алгебры кватернионов $\mathbf{Q}$. Эта алгебра размерности $n = 4$ над $\mathbf{R}$ имеет группу симметрии (группу *автоморфизмов*) $Aut(\mathbf{Q}) \cong \mathbf{SO(3)}$, изоморфную группе вращений 3-мерного пространства (алгебра $\mathbf{C}$ комплексных чисел, вопреки распространенным представлениям, вообще не обладает никакими непрерывными симметриями). Однако попытки использования исключительных свойств алгебры кватернионов для объяснения физического мира, предпринимавшиеся еще самим Гамильтоном и его последователями, не привели к успеху, поскольку кватернионный анализ, построенный по аналогии с комплексным, оказался вырожденным, а группа $SO(3)$ никак не расширялась до группы симметрии физического ПВ – группы Лоренца. В фундаментальной физике до сих пор использовались в основном комплексные кватернионы – т.н. *алгебра бикватернионов* $\mathbf{B}$, изоморфная алгебре 2×2 матриц с комплексными числами в качестве элементов (базис этой алгебры образуют хорошо известные в физике спиновые матрицы Паули). Алгебра $\mathbf{B}$ использовалась в основном для компактной записи основных уравнений физики, например УМ, в виде, похожем на хорошо известную их запись с помощью внешних форм Картана. С применением кватернионов в релятивистской физике можно ознакомиться, например, по работам [19, 20]. В РУДН интересное использование комплексных кватернионов, основанное на концепции 3-мерного времени и математически – на изоморфности группы $SO(3, \mathbf{C})$ автоморфизмов алгебры $\mathbf{B}$ группе Лоренца, – было предложено в работах А. П. Ефремова [21] (кватернионная теория относительности, q-базис и др.).

7. С другой стороны, в работах автора, начиная с 1980 года (см. ссылки в [4]), была предложена новая версия построения (би)кватернионного анализа, в которой обобщенные условия Коши-Римана (ОУКР) оказывались нелинейными как следствие *некоммутативности* алгебр $\mathbf{Q}, \mathbf{B}$. В частности, аналогом уравнения Лапласа при этом служит нелинейное уравнение "волнового фронта" (уравнение *эйконала*), а в случае алгебры $\mathbf{B}$ вся теория лоренц-инвариантна. На этой основе была развита т.н. *алгебродинамика* – нелинейная, нелагранжева, конформная, существенно переопределенная теория поля, в которой физические поля рассматривались как $\mathbf{B}$-значные функции бикватернионного переменного (аналог $\mathbf{C}$-аналитических функций), а их условия дифференцируемости – ОУКР – как единственные исходные уравнения динамики (по аналогии с лагранжианом стандартных теорий поля). Важно, что никаких дополнительных предположений математического либо физического свойства не делалось, т.е. система ОУКР и соответствующие ей функции-отображения рассматривались независимо от какой-либо физической феноменологии.

Несмотря на это, оказалось, что система ОУКР обладает естественной спинорной и калибровочной структурами, а отвечающие основным полям "полупроизводные" (некоммутативные аналоги производной $\mathbf{C}$-аналитических функций, см. раздел 1) однозначно интерпретируются как потенциалы *электромагнитного* поля, тождественно удовлетворяющего при этом вакуумным УМ (последние являются при этом условиями интегрируемости ОУКР). По отношению к УМ первичные ОУКР реализуют представленную выше концепцию скрытой нелинейности, обеспечивая, в частности, квантование электрического заряда для всех "отбираемых" ими решений.

8. Предварительные результаты исследования системы ОУКР и их физических следствий изложены в монографии автора [4] и в работах [5, 22, 23, 24]. В последующих работах [47, 48, 46, 50], в сотрудничестве с Дж. А. Ризкалла, был получен ряд общих результатов для наиболее интересного случая (равенства одной из полупроизводных основной $\mathbf{B}$-функции), когда геометрическая и физическая интерпретация становятся особенно прозрачными. Для ассоциированных с такими функциями-отображениями физических полей, помимо уравнения эйконала и УМ, тождественно выполняются также уравнения Янга-Миллса, уравнения д'Аламбера и (по крайней мере для стационарных решений) электровакуумные уравнения Эйнштейна-Максвелла. Таким образом, *большое число фундаментальных уравнений физики оказывается прямыми следствиями ОУКР*! В рассматриваемом случае система ОУКР, получившая название *генерирующей* системы уравнений (ГСУ), обладает *твисторной* структурой, а ассоциированная с основным $\mathbf{B}$-полем светоподобная конгруенция обладает рядом интересных и широко используемых в ОТО свойств, а именно оказывается *бессдвиговой* (см. раздел 5).

орему Керра и сводящую дифференциальных уравнений ГСУ к решению неявного алгебраического уравнения. В работах [5, 47, 49, 50] была также развита концепция "слабой" калибровочной инвариантности (с калибровочным параметром, зависящим от координат *неявным* образом, т.е. только через преобразуемое решение) и выявлена полная группа слабых абелевых калибровочных преобразований для ГСУ, тесно связанная с проективными преобразованиями в твисторном пространстве – конструкция, совершенно новая для теории поля (см. раздел 2).

9. Сведение решений ГСУ к алгебраическому уравнению позволило простым образом генерировать достаточно сложные ее решения и сопоставляемые им решения известных уравнений поля, в том числе УМ. На этом пути, в частности, было обнаружено бисингулярное решение и электрически нейтральное решение с динамически *перестраивающейся* (из кольца в тор) структурой сингулярного множества [48, 49, 50]. Сингулярная структура вообще является общей для всех полей, ассоциируемых с исходным решением ГСУ, и (в случае ее ограниченности в 3-пространстве) естественно интерпретируется как частицеподобный объект, а ее динамические перестройки – как *взаимопревращения* частиц (см. раздел 6).

Основной моделью электрона при этом является стационарное решение ГСУ с *кольцеобразной* сингулярностью, обладающее фиксированным (*элементарным*) электрическим зарядом, а в остальном являющееся полным аналогом решения Керра-Ньюмена (КН) в ОТО. Из сопоставления с ним решение ГСУ наделяется массой и спином, причем из ОТО известно [25], что гиромагнитное отношение для решения КН $g = 2$, т.е. имеет значение, соответствующее дираковской частице! Т.о. решение КН правильно воспроизводит все основные характеристики электрона, а в нашем подходе к тому же фиксирует значение его заряда. Особенно отметим, что никаких трудностей принципиального характера (расходимости, нарушения причинности и т.п.), связанных с сингулярным характером отвечающих частицам решений ГСУ, в рассматриваемом подходе не возникает, поскольку как динамика, так и "квантовые числа" сингулярных образований вполне определены и следуют из самой ГСУ.

10. С математической точки зрения, развиваемый подход к теории *частиц как протяженных сингулярностей* близко примыкает к т.н. "теории катастроф" или теории *особенностей дифференцируемых отображений* [26, 27] (популярное изложение можно найти в [29, 28]). При фиксированном числе "управляющих" параметров и размерности пространства отображения количество типов возможных особенностей и их непрерывных "перестроек" (аналога изменений во времени), как правило, конечно, невелико и в простейших случаях полностью классифицировано (так, например, в 3-х мерном пространстве в системах с одним управляющим параметром имеется 7 типов, впервые перечисленных в работе Р. Тома [30].

Из всех возможных особенностей и их перестроек в конкретной динамической системе реализуются только некоторые (ограничения дифференциальной природы приводят к топологическим запретам). В частности, в геометрической оптике особенности волновых фронтов и каустик (геометрических мест самопересечения световых лучей, т.е. "протяженных фокусов") определяются ограничениями, налагаемыми уравнением эйконала [27].

В силу существования структуры бессдвиговых световых конгруенций для каждого решения рассматриваемой ГСУ каустики естественно возникают и в рамках нашего подхода. Именно на каустиках обращается в бесконечность электромагнитное и метрическое поля, сопоставляемые решениям исходной ГСУ. С этой точки зрения *частицы представляют собой* не что иное, как (ограниченные в пространстве) *каустики первичных световых конгруенций*, а их форма и временная эволюция полностью определяются видом этих последних (в регулярной их части). При этом *классификация каустик и их перестроек может иметь прямое отношение к классификации элементарных частиц и их взаимодействий.*

11. Ниже мы делаем краткий обзор ранее установленных симметрий и свойств решений ГСУ (отсылая за доказательствами к нашим цитированным выше работам и к диссертации [49]). Затем изучаются связи УМ и уравнений Вейля с условиями интегрируемости ГСУ – *условиями комплексной самодуальности.* Показано, что целочисленность электрического заряда следует из этих условий и калибровочной инвариантности теории. Обсуждается также проблема магнитного монополя в контексте

дальнейшего развития теории.

1 Бикватернионная дифференцируемость и спинорная структура

Алгебра бикватернионов $\mathbf{B}$ изоморфна алгебре $Mat(2,\mathbf{C})$ комплексных 2×2 матриц, и типичный элемент $Z\in\mathbf{B}$ представляется в виде набора $Z=\{Z_{AB}\},\ A,B=0,1$ с обычными законами матричного умножения. Рассмотрим некоторую $\mathbf{B}$-значную функцию $F(Z)$ $\mathbf{B}$-аргумента, т.е. проще говоря *функцию от матриц* с компонентами $F_{AB}(Z)\in\mathbf{C}$, комплексно аналитическими в некоторой области $\mathbf{O}\subset\mathbf{C^4}$ изменения ее аргументов Z_{AB}.

Структура алгебры локально должна проявиться в операции дифференцирования $F(Z)$: а именно, дифференциал (линейная по аргументу dZ часть приращения) $dF=F(Z+dZ)-F(Z)$ функции $F(Z)$ *должен выражаться через инвариантную* $\mathbf{B}$*-значную 1-форму*, т.е. только с помощью операции умножения в $\mathbf{B}$,

$$dF=\Phi dZ\Psi \tag{1.1}$$

(знак матричного умножения здесь и в дальнейшем опускается). В (1.1) естественно возникают две вспомогательные функции $\Phi(Z),\Psi(Z)$, которые в предшествующих работах получили название *полупроизводных* (левой и правой соответственно) от основной функции $F(Z)$. Действительно, условия дифференцируемости (1.1) могут рассматриваться для функций на любой ассоциативной алгебре, в том числе и на коммутативной алгебре с делением – алгебре $\mathbf{C}$. Однако в таком случае имеем из (1.1) $dF=(\Phi\Psi)dZ\equiv F'dZ$, и величина $F'(Z)=dF/dZ$ является обычной производной. В этом случае соотношения (1.1) эквивалентны обычным линейным уравнениям Коши-Римана.

В некоммутативном случае алгебры $\mathbf{B}$ функции Φ,Ψ алгебраически уже независимы, хотя и определены с точностью до умножения на комплексное число (действительно, условия (1.1) инвариантны при замене $\Phi\to\alpha\Phi,\Psi\to\alpha^{-1}\Psi$). Функция $F(Z)$, для которой существует некоторая пара полупроизводных $\{\Phi(Z),\Psi(Z)\}$ (определенная с точностью до некоторой скалярной функции $\alpha(Z)$) такая, что тройка $\{F,\Phi,\Psi\}$ удовлетворяет условиям (1.1), называется $\mathbf{B}$-дифференцируемой.

Разложением по столбцам (строкам) соответствующих матриц *обобщенные условия Коши-Римана (1.1)* сводятся к двум системам вида

$$d\xi=\Phi dZ\eta, \tag{1.2}$$

где, например, $\xi_A=\{F_{00},F_{10}\},\ \eta_A=\{\Psi_{00},\Psi_{10}\}$. Очевидно, что всякое решение (1.1) можно сконструировать из пары (функционально зависимых или нет) решений (1.2) (с одной и той же $\Phi(Z)$). Напротив, имея хотя бы одно решение $\{\xi,\eta,\Phi\}$ условий (1.2), можно всегда достроить его до решения исходной системы (1.1) (занулив, например, вторые столбцы матриц F и Ψ).

$\mathbf{B}$*-дифференцируемые функции в нашем подходе отождествляются с физическими полями.* Однако их аргумент Z принадлежит комплексному ПВ $\mathbf{C^4}$, и пространство Минковского выделяется в нем условием *эрмитовости* матриц координат $Z=Z^+$. Именно такая область определения независимой $\mathbf{B}$-переменной (с переобозначением элементов $Z\Rightarrow X,\ X=X^+$) и рассматривается в дальнейшем (относительно возможной фундаментальной роли комплексного ПВ см., например, [31, 32, 5]).

С учетом ограничения области изменения аргумента система (1.2) переписывается в виде

$$d\xi=\Phi dX\eta \tag{1.3}$$

и инвариантна, в частности, относительно преобразований Лоренца, сохраняющих эрмитову структуру координатного пространства

$$X\mapsto C^+XC,\quad \eta\mapsto C^{-1}\eta,\quad \xi\mapsto C^{-1}\xi,\quad \Phi\mapsto C^{-1}\Phi(C^+)^{-1}, \tag{1.4}$$

где $C\in SL(2,\mathbf{C})$. Отсюда видно, что величины $\xi(X)$, $\eta(X)$ можно рассматривать как $SL(2,\mathbf{C})$-спиноры (хотя на самом деле их свойства инвариантности намного богаче, см. [5]), а матрицу $\Phi(X)$ – как 4-вектор (вообще говоря, $\mathbf{C}$-значный). Заметим, что разложением по базису $\{\sigma_\mu\}=\{I;\sigma_a\},\ a=1,2,3$, включающем единичную 2×2-матрицу I и матрицы Паули $\{\sigma_a\}$, компоненты эрмитовой матрицы $X=$

соотношениями (скорость света выбрана единичной):

$$X^{00'} \equiv u = t + z, \quad X^{11'} \equiv v = t - z, \quad X^{01'} \equiv w = x - iy, \quad X^{10'} \equiv \bar{w} = x + iy; \tag{1.5}$$

при этом определитель матрицы X соответствует обычному интервалу Минковского и сохраняется при преобразованиях Лоренца (1.4).

В предыдущих работах рассматривался в основном наиболее интересный частный случай соотношений (1.3), когда оба спинора полагаются равными друг другу, $\eta(X) \equiv \xi(X)$. При этом система уравнений (1.3) (получившая для данного случая название *генерирующей системы уравнений* (ГСУ)) переписывается в виде

$$d\xi = \Phi dX\xi, \tag{1.6}$$

а ее решениями служат различные пары $\{\xi(X), \Phi(X)\}$ соответствующих друг другу спинорного и (комплексного) 4-векторного (в дальнейшем интерпретируемого как электромагнитное) полей. Ниже дан краткий обзор свойств ГСУ (1.6).

2 Твисторная и калибровочная структура ГСУ

Отметим прежде всего, что ГСУ (1.6) может рассматриваться как условие существования спинорного поля $\xi(X)$, *ковариантно постоянного* относительно *левой* **B**-*связности*

$$\Omega(X) = \Phi dX \tag{2.1}$$

В 4-векторном представлении эта связность порождает *аффинную геометрию Вейля-Картана* с вектором неметричности Вейля и псевдоследом (абсолютно антисимметричного) тензора кручения, пропорциональными друг другу. Соответствующие коэффициенты связности имеют вид [4, 5]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Phi_\mu \delta^\rho_\nu + \Phi_\nu \delta^\rho_\mu - \Phi^\rho \eta_{\mu\nu} - i\varepsilon^{\rho}_{\mu\nu\lambda}\Phi^\lambda, \tag{2.2}$$

($\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$; $\eta_{\mu\nu}$ - тензор Минковского, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ - псевдотензор Леви-Чивита), причем их вид однозначно определяется структурой (левого) умножения в **B**, т.е. самой алгеброй бикватернионов. Связность (2.2) имеет ряд замечательных свойств [33, 34], в том числе отмеченную В. Г. Кречетом Р-неинвариантность, что может быть использовано для построения *геометрических моделей слабых взаимодействий*, включая модель Вайнберга-Салама. Кроме того, по существу та же связность естественно возникает в геометриях σ-моделей и при обобщениях римановой геометрии и уравнений Эйнштейна [35]. Интересные свойства ковариантно-постоянных относительно связностей Вейля-Картана векторных полей рассматривались также в нашей работе [46].

Связность (2.1) оказывается *самодуальной* в "слабом смысле", т.е. на решениях ГСУ. Действительно, применяя операцию внешнего дифференцирования к системе (1.6), переписанной в виде

$$d\xi = \Omega\xi, \tag{2.3}$$

с учетом свойства $d^2 \equiv 0$ будем иметь следующие *условия интегрируемости*:

$$0 = R\xi \equiv (d\Phi - \Phi dX\Phi) \wedge dX\xi \equiv \pi \wedge dX\xi = 0, \tag{2.4}$$

где эффективная **B**-значная 2-форма кривизны R выражается через 1-форму π (выражение скобках) и, как следствие (2.4), оказывается самодуальной (простое доказательство этого факта можно найти в [4, 5], в 2-спинорном формализме – в [50]). При этом отличная от нуля часть связности определяет напряженность некоторого **B**-значного калибровочного поля, следовая часть которой естественно отождествляется с электромагнитным, а бесследовая – с янг-миллсовским полями (вообще говоря, **C**-значными). Как следствие самодуальности (плюс тождеств Бианки), эти части кривизны удовлетворяют соответственно вакуумным УМ и уравнениям Янга-Миллса. Т.о. *уравнения калибровочных полей в данном подходе не постулируются, а являются тождественными следствиями исходной фундаментальной системы уравнений (1.6)* !

лов $\Phi = A_\mu \sigma_\mu$ и напряженностей $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ассоциированного с решением ГСУ **C**-значного электромагнитного поля [1]:

$$F^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda} = iF_{\mu\nu} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathcal{E}} + i\vec{\mathcal{H}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_0 A_a - \partial_a A_0 + i\varepsilon_{abc}\partial_b A_c = 0. \tag{2.5}$$

Плюс к этому имеет место добавочное "неоднородное условие Лоренца" [4, 5]

$$\partial_\mu A^\mu + 2A_\mu A^\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_0 A_0 - \partial_a A_a + 2(A_0^2 - A_a A_a) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $a, b, c, ... = 1, 2, 3$, и введены комплексные электрическая $\vec{\mathcal{E}}$ и магнитная $\vec{\mathcal{H}}$ напряженности. Смысл этих условий и их важные физические следствия обсуждаются ниже (раздел 3).

Остановимся теперь кратко на твисторной структуре ГСУ и ее следствиях (с соответствующим формализмом можно ознакомиться по книге [10]). В каждой точке пространства-времени $X = \{X^{AA'}\}$ введем спинор τ, сопряженный основному спинору ξ, с помощью линейного соотношения

$$\tau = X\xi, \quad (\tau^A = X^{AA'}\xi_{A'}). \tag{2.7}$$

Пара спиноров $\mathbf{W} = \{\xi, \tau\}$ образует *твистор* пространства Минковского, причем на его действительной части этот твистор изотропен, т.е. имеет нулевую *норму*, что в используемом представлении соответствует условию $\tau^+\xi - \xi^+\tau = 0$.

В работах [49, 50] показано, что *любые три компоненты твистора* $\mathbf{W}$ *функционально зависимы на решениях ГСУ* (две независимые компоненты существуют для любого ненулевого твистора). Идею доказательства можно пояснить, переписав (1.6) в следующем эквивалентном виде:

$$d\xi = \Phi d(X\xi) - \Phi X d\xi, \quad \Leftrightarrow \quad (I + \Phi X)d\xi = \Phi d\tau, \tag{2.8}$$

в котором отсутствуют в явном виде дифференциалы координат dX. Отсюда следует, что имеется две (по числу уравнений в (2.8)) функциональные связи между компонентами спиноров ξ и τ, т.е. для каждого (аналитического) решения ГСУ можно указать некоторые две независимые голоморфные функции $\Pi^{(C)},\ C = 0, 1$ от 4-х твисторных компонент такие, что

$$\Pi^{(C)}(\xi, \tau) = 0 \tag{2.9}$$

на соответствующем решении. Замечательно, что при фиксированных $\Pi^{(C)}$ неявные алгебраические уравнения (2.9) сами по себе определяют вид решения (во всех точках ПВ, кроме некоторого подмножества меры нуль, см. ниже). Действительно, алгебраически спинор τ пропорционален спинору ξ через соотношения (2.7), поэтому (2.9) есть система двух уравнений относительно двух неизвестных компонент спинора $\xi_{A'}$. Решая (2.9) в точках $X^{AA'}$ общего вида, в которых *якобиан отображения* $\xi \mapsto \Pi$ отличен от нуля, из (2.9) однозначно получаем зависимость $\xi_{A'}(X)$, а потенциалы $\Phi_{A'A}$ получаются из них однократными дифференцированиями (см. ниже, раздел 5). То, что для *любых* регулярных $\Pi^{(C)}$ и в регулярной области полученная пара $\{\xi(X), \Phi(X)\}$ будет тождественно удовлетворять ГСУ, легко проверяется прямым дифференцированием (2.9) по координатам. Поскольку *каждому* решению ГСУ можно в области регулярности сопоставить некоторые $\Pi^{(C)}$, то система (2.9) определяет на самом деле *общее (аналитическое) решение ГСУ* в неявной алгебраической форме!

На множестве точек, в которых определитель

$$\det ||\frac{d\Pi^{(C)}}{d\xi_{A'}}|| = 0 \tag{2.10}$$

уравнение (2.9) имеет кратные корни, и процедура становится неоднозначной. Показано (см. раздел 5), что при этом соответствующие решению электромагнитное и другие поля обращаются в бесконечность, так что условие (2.10) определяет форму и эволюцию некоторого *сингулярного протяженного*

[1] Напряженности поля Янга-Миллса алгебраически выражаются через тензор $F_{\mu\nu}$ и спинор ξ, см. [49]

тельным и в каждый фиксированный момент времени определяет некоторую кривую в $\mathbf{R^3}$; в исключительных случаях вместо нее возможны 0-мерные (точки) или 2-мерные (мембраны) структуры, причем размерность может меняться в ходе эволюции (см. раздел 6). Если при этом структура сингулярного множества ограничена в 3-пространстве (в каждый конечный момент времени), то это множество может интерпретироваться как *частицеподобный объект* (или их совокупность в несвязном случае).

В заключение этого раздела отметим еще необычную структуру калибровочной симметрии уравнений ГСУ, обнаруженную впервые в [5] и детально исследованную в [49, 50]. Ее специфика понятна из вида общего решения (2.9), остающегося инвариантным при преобразованиях

$$\xi \mapsto \alpha\xi, \quad \tau \mapsto \alpha\tau, \quad \alpha = \alpha(\xi_{A'}, \tau^A) \equiv \alpha(\mathbf{W}) \tag{2.11}$$

с калибровочным параметром α, зависящим от координат лишь неявным образом, т.е. *только через компоненты преобразуемого твистора* $\mathbf{W}$ (оба составляющих его спинора преобразуются одинакого в силу определяющего соотношения (2.7)). Такие преобразования сохраняют "твисторную структуру" (2.9) и приводят тем самым к новому решению ГСУ. Нетрудно показать, что при этом потенциалы A_μ такие, что $\Phi = A_m u \sigma_\mu$ преобразуются обычным градиентным образом

$$A_\mu \mapsto A_\mu - 2\partial_\mu \ln\alpha, \tag{2.12}$$

а напряженности остаются инвариантными.

Такого рода ограниченные калибровочные преобразования были названы *слабыми*. Интересно, что они составляют несобственную подгруппу всей группы $\mathbf{C}$ абелевых преобразований калибровочного поля (последняя в свою очередь является комплексным аналогом калибровочной группы $U(1)$ вещественной электродинамики). Геометрически слабые преобразования отвечают *проективным* преобразованиям в пространстве (нулевых) твисторов [50].

3 Уравнения самодуальности вместо уравнений Максвелла и Вейля

Мы вернемся теперь к условиям комплексной самодуальности (УКС) (2.5) и рассмотрим их сами по себе, т.е. безотносительно к первичной системе ГСУ, из которой они получены. Известно, что аналогичные условия играют важную роль в теории свободных полей Янга-Миллса (как правило, в евклидовом пространстве E^4, поскольку вещественные поля несовместимы с мнимыми собственными значениями оператора дуального сопряжения, см., например, [36]). Сами уравнения Янга-Миллса следуют при этом из *тождеств Бианки* для матричной 2-формы напряженности $F = dA - A \wedge A$ и условий самодуальности $F = F^*$. Более того, абсолютный минимум функционала действия достигается именно на самодуальных решениях. Вместе с тем, однако, возможны и несамодуальные решения, соответствующие локальным экстремумам.

Аналогичная конструкция возможна и для случая электромагнитных (ЭМ) полей. Более того, мы покажем, что, в отличие от случая полей Янга-Миллса, *всякое* решение (обычных вещественных вакуумных) УМ локально в области регулярности может быть получено из УКС, т.е. *условия (2.5) локально эквивалентны УМ.* Этот факт представляется весьма интересным, поскольку рассмотрение УКС вместо УМ понижает порядок уравнений и позволяет работать с системой трех уравнений 1-го порядка для 4-х комплексных функций – потенциалов A_μ (которая выбором калибровки редуцируется к *двум уравнениям для двух комплексных функций, эквивалентным уравнениям Вейля*, см. ниже.

Заметим предварительно, что число алгебраически независимых "степеней свободы" напряженностей комплексного ЭМ-поля, удовлетворяющих УКС

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{D}, \ \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + i\vec{D}, \tag{3.1}$$

в точности равно таковому для вещественного ЭМ-поля общего вида, поскольку в силу (2.5) имеем

$$\vec{D} = -\vec{H}, \ \vec{B} = \vec{E}, \tag{3.2}$$

так что пара *вещественных* векторов $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ остается независимой, а другая пара $\{\vec{D}, \vec{B}\}$, соответствующая мнимым частям исходных $\mathbf{C}$-напряженностей, оказывается дуальной к ним. УМ, имеющие линейности *выполняются для каждой из вещественных и дуальных друг другу пар полей* $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ *и* $\{\vec{D}, \vec{B}\}$ *по отдельности.*

Пусть теперь в некоторой области ПВ имеем *произвольное* гладкое (для простоты класса C^ω) решение $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ обычных УМ. Тогда, сопоставляя ему дуально сопряженную пару полей (3.2) и образуя комплексные комбинации (3.1), автоматически имеем для них УКС $\vec{\mathcal{E}} + i\vec{\mathcal{H}} = 0$. Для них, очевидно, выполняются комплексифицированные УМ, и как следствие этого факта, существует (локально) комплексный 4-потенциал $A_\mu = \{A_0, \vec{A}\}$, так что $\vec{\mathcal{E}} = \partial_0\vec{A} - \vec{\nabla}A_0$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. В силу УКС тогда для компонент потенциала имеют место уравнения 1-го порядка (2.5) и тем самым *произвольное решение УМ может быть получено как их следствие.*

Используем теперь свободу выбора потенциалов, связанную с калибровочной инвариантностью УКС (2.5), и наложим на них дополнительное условие Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{3.3}$$

Система 4-х уравнений (2.5) и (3.3) записывается в компактной 2-спинорной форме для матричных компонент комплексного 4-потенциала $\Phi = \{\Phi_{A'A}\} \equiv A_\mu \sigma_\mu$ [4, 5, 50]

$$\partial^{AA'}\Phi_{A'B} = 0, \tag{3.4}$$

и разбивается на две однотипные системы для спиноров $\Phi_{A'0} \equiv \{\phi^{(0)}\}$ и $\Phi_{A'1} \equiv \{\phi^{(1)}\}$ вида

$$\partial^{AA'}\phi_{A'} = 0, \tag{3.5}$$

так что каждое решение начальной системы (2.5),(3.3), а тем самым по доказанному выше и УМ, локально может быть получено из двух (функционально зависимых или нет) решений системы (3.5).

С другой стороны, последнее уравнение (3.5) – это спинорная форма *уравнения Вейля*, соответствующее безмассовым частицам спина 1/2 – нейтрино. Таким образом, мы фактически показали, что всякое решение УМ может быть локально получено из двух решений уравнений Вейля, и наоборот, всякие два (или даже одно нетривиальное) решения уравнений Вейля определяют некоторое решение УМ. Полученный результат вызывает ассоциации с "теорией слияния" Л. де Бройля, в которой фотон представляется как связанное состояние двух нейтрино.

Заметим, что спинорная запись УКС (3.4) по форме напоминает известное спинорное представление УМ

$$\partial^{AA'}F_{(AB)} = 0, \tag{3.6}$$

где в отличие от (3.4) $F_{(AB)}$ – симметричный спинор напряженностей ЭМ-поля ([10]; см.также [37]). Однако в такой форме связь УМ с уравнениями Вейля совсем не очевидна, поскольку в силу симметрии по индексам A, B спинор $F_{(AB)}$ и соответственно уравнения (3.4) не могут быть редуцированы к более простому виду, отвечающему случаю спина 1/2. Через УКС такую редукцию осуществить удается, поскольку *компоненты "волновой функции" (вейлевского спинора) сопоставляются здесь не с напряженностями ЭМ-поля, а с компонентами* (**C** *-значного) 4-потенциала.*

4 Квантование электрического заряда и отсутствие монополей

Наиболее интересным, однако, представляется связь условий самодуальности с квантованием электрического заряда, которая имеет место при наличии калибровочной инвариантности теории. А именно, пусть в теории имеется, кроме электромагнитного поля, еще некоторое (скалярное, 2-спинорное, дираковское) поле $\Psi(X)$ ("волновая функция"), так что 4-потенциалы $A_\mu(X)$ (возможно, **C**-значные) входят в уравнения поля только через удлиненную производную $(\partial_\mu - bA_\mu)\Psi$, $b = Const$, и имеется, следовательно, инвариантность относительно калибровочных преобразований вида

$$\Psi \mapsto \exp^{\alpha(X)} \Psi, \quad A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{b}\partial_\mu \alpha \tag{4.1}$$

ческий заряд сосредоточен в конечной области пространства: тогда утверждается, что *величина этого заряда либо равна нулю, либо есть целократное от некоторого минимального "элементарного" заряда, равного* $1/2b$.

Действительно, используя теорему Гаусса (дающую, собственно, и определение полного заряда Q), а также условия самодуальности и теорему Стокса, имеем, интегрируя по замкнутой 2-поверхности S, охватывающей заряды:

$$4\pi Q = \int \vec{\mathcal{E}} d\vec{\sigma} = -i \int \vec{\mathcal{H}} d\vec{\sigma} = -i \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{\sigma} = -i \sum \oint A_l \; dl \equiv -i \sum_k J^{(k)}, \tag{4.2}$$

где интегралы $J^{(k)}$ берутся по (инфинитезимальным) замкнутым кривым, обходящим точки пересечения S с сингулярными кривыми векторного потенциала ("дираковскими струнами"). Ненулевой вклад дает только сингулярная часть потенциала, которая неизбежно является "чистой калибровкой", т.е. градиентом от некоторой комплексной функции $\vec{A} = \vec{\nabla}\lambda$: в противном случае магнитное поле имело бы особенности на S. С учетом этого $J^{(k)} = \Delta\lambda$; однако изменение $\Delta\lambda$ функции $\lambda(X)$ при обходе сингулярности в силу калибровочной инвариантности (4.1) связано с соответствующим изменением "волновой функции" $\Delta\Psi = \exp(b\Delta\lambda)$. Из однозначности решения $\Psi(X)$ вне сингулярностей поля следует, что все его изменение при обходе сингулярности сводится лишь к возможному изменению *фазы* на число, кратное 2π, т.е. имеем $b\Delta\lambda = 2\pi i N, \; N \in Z$. Отсюда $J^{(k)} = 2\pi N i/b$, а суммирование по всем сингулярностям сводится просто к переопределению целого числа N. Возвращаясь теперь к исходной формуле (4.2), имеем для электрического заряда следующее условие квантования [2]:

$$Q = \frac{1}{2b} N. \tag{4.3}$$

На самом деле, вышеприведенное доказательство соответствует известной аналогичной конструкции Дирака для *магнитного монополя* [41], однако за счет условий самодуальности переводит его в электрический. Если, как в квантовой теории, положить $b = ie/hc$, то электрический заряд получится мнимым [3], но для магнитного заряда $M = -iQ$ будем иметь в точности условие квантования Дирака $M = (hc/2e)N$. Такое соответствие, однако, чисто формально. В нашем случае *магнитный и электрический заряд для любого решения всегда равны по модулю и оба кратны элементарному заряду, равному* $1/2b$ (напомним, что подход Дирака не объясняет квантования каждого из зарядов, а лишь связывает одно из них с другим).

Строго говоря, в моделях рассматриваемого вида речь идет лишь об одном типе заряда, который условно можно считать электрическим. С этой точки зрения *магнитных монополей не существует.* Однако этот вывод был бы верен, если сила взаимодействия частицеподобных образований, возникающих как решения полевых уравнений, определялась бы только одним (электрическим) зарядом. В классической электродинамике для системы частиц, обладающих одинаковым отношением магнитного заряда к электрическому, это действительно так: соответствующая теорема доказана, например, в [40]. Тем не менее, в нашем случае вопрос требует отдельного рассмотрения. Заметим, что другие соображения геометрического характера в пользу возможного фактического отсутствия магнитных монополей в моделях рассматриваемого типа приведены в [5].

Заметим в заключение, что другие (динамические и чисто топологические) подходы к фундаментальной проблеме квантования электрического заряда рассматривались, например, в [38, 39, 11].

5 Редукция ГСУ к уравнениям бессдвиговых конгруенций

Вернемся теперь непосредственно к анализу нашей ГСУ, случай которой несколько отличен от вышерассмотренной общей ситуации. А именно, как следствие ГСУ с необходимостью выполняется (а

[2] Совершенно аналогично рассматривается и случай, когда вместо отдельных точек на S присутствуют сингулярные *линии* векторного потенциала.

[3] В этом выражении для константы b величина e выступает как фиксированная константа взаимодействия и не имеет прямого смысла электрического заряда частицеподобных решений уравнений поля.

системы (3.4) будем иметь для потенциалов нелинейную систему вида

$$\partial^{AA'}\Phi_{A'B} - \Phi^{AA'}\Phi_{A'B} = 0 \tag{5.1}$$

(при симметризации нелинейный член пропадает, и восстанавливается линейность УКС). Тем не менее, используя дополнительно возможность слабого калибровочного преобразования, для нетривиальных решений с отличным от нуля ЭМ-полем всегда можно свести ГСУ к системе следующего вида [5, 48]:

$$\partial_u G = \kappa,\ \partial_{\bar{w}} G = \rho,\ \partial_w G = \kappa G,\ \partial_v G = \rho G, \tag{5.2}$$

для неизвестных функций $\{G(X);\ \kappa(X), \rho(X)\}$ таких, что

$$\xi^T_{A'} = \{1, G\};\quad \Phi_{A'0} \equiv 0,\ \Phi_{A'1} \equiv \{\kappa, \rho\}. \tag{5.3}$$

Здесь фигурируют частные производные по спинорным координатам, определенным ранее соотношениями (1.5). Исключая из (5.2) компоненты потенциала, имеем для единственной неизвестной компоненты спинора $G(X)$ систему двух уравнений вида

$$\partial_w G = G\partial_u G,\quad \partial_v G = G\partial_{\bar{w}} G. \tag{5.4}$$

При этом, как нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием (5.2), сами оставшиеся ненулевыми компоненты потенциала $\kappa(X), \rho(X)$ удовлетворяют уравнениям "вейлевского" типа

$$\partial_{\bar{w}}\kappa = \partial_u \rho,\quad \partial_v \kappa = \partial_w \rho \tag{5.5}$$

в полном соответствии с общим случаем (3.5).

Все последующие рассуждения, касающиеся квантования заряда, также остаются в силе. При этом роль "волновой функции" играет спинор ξ (с одной нетривиальной компонентой G в случае калибровки (5.3)), а его однозначность (с точностью до изменения фазы на $2\pi N$) вне сингулярностей ЭМ-поля с необходимостью следует из структуры общего решения (2.9). Действительно, в калибровке (5.3) система (2.9) редуцируется к одному алгебраическому уравнению вида

$$\Pi(G, \tau^0, \tau^1) \equiv \Pi(G,\ u + wG,\ \bar{w} + vG) = 0 \tag{5.6}$$

(второе уравнение вырождается в тривиальное $\xi_{0'} - 1 = 0$). Условие (2.10), определяющее сингулярности ЭМ-поля, принимает при этом вид

$$P \equiv \frac{d\Pi}{dG} = 0 \tag{5.7}$$

и отвечает возникновению кратных корней у уравнения (5.6). Вне зарядов сингулярности поля отсутствуют, и основная компонента спинора $G(X)$ однозначна (для выбранной "ветви" решения ГСУ).

В соответствии с видом калибровочных преобразований 4-потенциала (2.12) коэффициент b в данном случае равен двум, и формула (4.3) для разрешенных значений (безразмерного) электрического заряда принимает вид

$$Q = \frac{1}{4}N,\ N = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{5.8}$$

Единицы измерения всегда могут быть выбраны так, чтобы минимальный *размерный* электрический заряд был бы равен элементарному e. Интересно, что в данной модели, имеющей дело с **C**-значными напряженностями ЭМ-поля, *электрический заряд тем не менее получается действительным.* Постоянная Планка входит в теорию лишь косвенно, через соответствие с ОТО (см. введение).

Уравнения (5.4), к которым редуцируется ГСУ в калибровке (5.3) после исключения потенциалов, хорошо известны в теории 2-спиноров и ОТО (см., например, [10]). Удовлетворяющее им спинорное поле $\xi_{A'}(X)$ определяет изотропную *конгруенцию* с касательным векторным полем

$$k_\mu = \xi^+ \sigma_\mu \xi,\qquad k_\mu k^\mu \equiv 0. \tag{5.9}$$

бессдвиговой (относительно геометрической интерпретации этих понятий см., например, [10, 42]; при этом из геодезичности в пространстве Минковского следует, что конгруенция k_μ имеет структуру *пучка изотропных прямых*). С другой стороны, знаменитая *теорема Керра* [43] дает общее решение уравнений, определяющих бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруенции (БСК) в неявном алгебраическом виде, в точности эквивалентном вышеприведенному выражению (5.6). При этом особые точки пересечения соседних лучей конгруенции – *каустики* – определяются условием (5.7) и в нашем формализме соответствуют сингулярностям ассоциированного ЭМ-поля.

Действительно, в нашей работе [50] получено явное представление спинора напряженностей ассоциированного с решениями ГСУ-БСК ЭМ-поля $F_{(AB)}$ через (первые и вторые) производные $\Pi_A, \Pi_{AB},\ A, B = 0, 1$ от основной производящей функции (5.6) по своим твисторным аргументам τ_A:

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}\left(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P})\right), \tag{5.10}$$

из которого сразу видно, что сингулярности ЭМ-поля соответствуют обращению в нуль полной производной (5.7) или, эквивалентно, особым точкам конгруенции (5.9) и кратным корням уравнения (5.6).

Таким образом, имеющие чисто абстрактную алгебраическую природу уравнения ГСУ (условия дифференцируемости **B**-функций) оказываются по существу эквивалентными известным уравнениям БСК. Заметим, что, вообще говоря, *тесная связь БСК с решениями линейных волновых уравнений, в том числе УМ, известна уже давно* [44, 10, 45] и представляет собой одну из "жемчужин" твисторной программы Пенроуза, однако использованный нами способ сопоставления решениям БСК ЭМ-поля более естественен, не требует интегрирования и, главное, автоматически приводит к квантованию электрического заряда для его источников. Кроме того, рассмотренный метод позволяет заодно генерировать и решения ассоциируемых с БСК *нелинейных* уравнений Янга-Миллса, правда в общем случае **C**-значных. Соответствующая процедура рассмотрена в работах [5, 50] [4].

Наконец, помимо ЭМ и янг-миллсовского калибровочных полей, каждому решению уравнений ГСУ-БСК можно стандартным с точки зрения ОТО путем, через изотропную конгруенцию k_μ, сопоставить некоторую эффективную риманову метрику (т.н. *метрику Керра-Шилда* [8])

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + hk_\mu k_\nu, \tag{5.11}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – "фоновая" метрика Минковского, а $h = h(x)$ – некоторая скалярная функция. Известно, что именно в случае, когда конгруенция k_μ является геодезической и бессдвиговой, подстановка анзатца (5.11) в электровакуумную систему уравнений Эйнштейна-Максвелла (или просто в вакуумные уравнения Эйнштейна) ведет к существенным упрощениям, так что во многих случаях подбором единственной (кроме конгруенции) функции $h(x)$ удается удовлетворить полной системе и получить точное решение. В частности, это имеет место для стационарного случая, отвечающего сингулярным решениям типа Керра-Ньюмена (с кольцеобразной сингулярностью произвольного радиуса a) или Райснера-Нордстрема (точечная сингулярность при $a = 0$).

Интересно, что в этих случаях ЭМ-поля, полученные как решения самосогласованной системы Эйнштейна-Максвелла, совпадают с полями (5.10), генерированными непосредственно по решениям ГСУ-БСК, если отвлечься от квантования электрического заряда для последних. В общем случае сингулярности кривизны римановой метрики (5.11) соответствуют особым точкам конгруенции k_μ и определяются, следовательно, тем же условием (5.7), что и сингулярности ЭМ-полей (5.10).

Таким образом, *каждому решению основных уравнений (5.4) явным образом ставится в соответствие электромагнитное, комплексное янг-миллсовское и эффективное гравитационное поля.* Всюду в области регулярности калибровочные поля удовлетворяют соответственно уравнениям Максвелла и Янга-Миллса, в то время как гравитационное удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (с тензором ЭМ-поля в качестве источника) только для стационарного случая (решения керровского типа). Тем не менее, *сингулярности определяются единым условием и являются общими для всех полей,*

[4] В диссертации [49] приведено явное выражение для дифференциальной 2-формы напряженностей поля Янга-Миллса $\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F^a}\},\ \mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ через основную (проективную) спинорную функцию $G(x)$ и соответствующую ей (2-форму) ЭМ-поля F (5.10).

является нетривиальным; обсуждение этих проблем см. в [51]).

6 Заключение. Решения ГСУ и динамика сингулярностей-частиц

Предыдущее рассмотрение свойств ГСУ-БСК естественно приводит к концепции *частиц как (ограниченных в 3-пространстве) сингулярностей поля.* Как уже указывалось, форма и временна́я динамика этих сингулярностей описывается единым условием (5.7), общим для всех физических полей, сопоставляемых каждому решению первичных уравнений (1.6), редуцированных к алгебраическому уравнению (5.6). Одно комплексное условие (5.7) определяет, как правило, некоторую движущуюся пространственную *кривую*, простейшим примером которой служит сингулярное кольцо решения Керра-Ньюмена. Однако в особых случаях такая кривая может вырождаться в точечную особенность или, напротив, определять двумерную поверхность. Более того, в процессе временно́й эволюции могут происходить качественные *перестройки* структуры сингулярностей, вплоть до изменения их топологии и размерности. Такие перестройки, также как и нетривиальная эволюция сингулярностей между ними, следуют лишь из исходных уравнений ГСУ-БСК как результат существенно нелинейной структуры последних и отсутствия для них принципа суперпозиции. Последнее свойство определяет также дискретный, "квантованный" спектр характеристик частицеподобных сингулярных объектов.

Таким образом, все основные "квазиклассические" свойства элементарных частиц: устойчивость, наличие у них сохраняющихся "квантовых чисел", способность к взаимодействию и взаимопревращению (перестройки), – простым и единообразным образом описываются в рамках рассматриваемой алгебраической теории. При этом взаимодействие сингулярных объектов вовсе *не сводится к электромагнитному*, а носит достаточно сложный и разнообразный характер.

Примеры нетривиальной топологической структуры и динамики сингулярных частицеподобных образований приведены и обсуждаются в работах [5, 48, 50, 51]. Помимо (моделирующего электрон (?), см. [52, 53, 54, 48]) фундаментального статического решения – аналога решения Керра-Ньюмена, – найдено, в частности, *бисингулярное решение* с ЭМ-полем, воспроизводящим известное решение Борна для равноускоренно движущегося заряда (величина которого, однако, здесь квантована и равна заряду фундаментального решения!). Особенный интерес представляет его комплексная, электрически нейтральная модификация с кольцеобразной сингулярностью, перестраивающейся в тор [47, 49, 50]. Обнаружены также решения, не обладающие аксиальной симметрией [51].

К настоящему времени уже получены решения с намного более сложной, многосингулярной структурой, явным образом на классическом уровне описывающие *процессы аннигиляции, рождения пар, поглощения/испускания сингулярных волновых фронтов, процессы "распада" и др.* Особенно удивительно, что все это следует из одной лишь фундаментальной исходной структуры ГСУ-БСК, имеющей чисто алгебраическую природу. С другой стороны, эти решения удовлетворяют также (в области их регулярности) обычным линейным уравнениям Максвелла для пустого пространства, причем структура сингулярности вполне определена максимальным аналитическим продолжением последних. Тем самым материя фактически порождается полем вполне аналогично солитонным схемам. С другой стороны, однако, поле становится в некотором смысле вторичным, поскольку именно сингулярные объекты, их форма, движение и перестройки, становятся основным объектом теории (подробнее см. [51]).

Основными нерешенными на сегодняшний день вопросами представляются отсутствие полной классификации возможных типов сингулярностей (и их перестроек) и вывода общего уравнения их движения. Возможно, эта задача найдет решение при анализе полной исходной алгебраической системы ОУКР (1.1), т.е. общих условий аналитичности в алгебре комплексных кватернионов (напомним, что рассматриваемая выше ГСУ (1.6) является лишь ее частным, хотя и важным, случаем). Для системы ОУКР также обнаружено существование твисторной и калибровочной структур и получено (в неявной алгебраической форме) общее решение; мы предполагаем изложить эти вопросы в последующих работах.

Автор благодарен Ю. П. Рыбакову и Ю. С. Владимирову за полезные обсуждения и советы, своим ученикам – Ж. А. Ризкалла за многолетнюю совместную работу и В. Н. Тришину за подбор литературы.

[1] Рыбаков Ю.П. *Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Том 2.* – М., ВИНИТИ АН СССР, 1991, с 56

[2] Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И. *Усп. физ. наук*, **162**, (1992), 1; **164**, (1994), 121

[3] Кассандров В. В. *Вестник РУДН, сер. физ.*, **1**, (1995), 168

[4] Кассандров В. В. *Алгебраическая структура пространства- времени и алгебродинамика.* – М., изд. РУДН, 1992

[5] Kassandrov V. V. *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1995), 216; (*Preprint* gr-qc / 0007027)

[6] Ward J. *Phys. Lett.*, **61A**, (1977), 81

[7] Atiah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. I., Manin Yu. I. *Phys. Lett.*, **65A**, (1978), 185

[8] Debney G. C., Kerr R. P., Schild A. *J. Math. Phys.*, **10**, (1969), 1842

[9] Манин Ю. И., Хенкин Г. М. *Ядерная физ.*, **35**, (1982), 1610

[10] Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. Том 1,2.* – М., "Мир", 1987,1988

[11] Ranãda A. F., Trueba J. L. *Phys. Lett.*, **202A**, (1995), 337; *Phys. Lett.*, **235A**, (1997), 25

[12] Ranãda A. F. *An. Fis. (Madrid)*, **A87**, (1991), 55; *Preprint* hep-th / 9802166

[13] Эйнштейн А. *Собрание сочинений. Том 3.* – М., "Наука", 1967, с 456

[14] Вигнер Е. *Этюды о симметрии.* – М., "Мир", 1971, с 182

[15] Eddington A. S. *Fundamental theory.* – N.Y., Cambridge Press, 1946

[16] Hestenes D. *Space-time algebra.* – N.Y., Gordon & Breach, 1966

[17] Кулаков Ю. И. *Элементы теории физических структур.* – Новосибирск, изд. НГУ, 1968; *ДАН СССР*, **201**, (1968), 570

[18] Владимиров Ю. С. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1,2.* – М., изд. МГУ, 1996,1998

[19] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. *Кватернионы в релятивистской физике.* – Минск, "Наука и техника", 1989

[20] Быстров К. Н., Захаров В. Д. *Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Том 1.* – М., ВИНИТИ АН СССР, 1991, с 111

[21] Ефремов А. П. *Вестник РУДН, сер. физ.*, **3**, (1995), 117; *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1997), 200

[22] Kassandrov V. V. *Acta Applic. Math.*, **50**, (1998), 197

[23] Kassandrov V. V. *Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике*, ред. Лыхмус Я. К., Кууск П. – Таллинн, ИФ АН Эстонии, вып. 66, 1990, с 202

[24] Кассандров В. В. 1993 *Вестник РУДН, сер. физ.*, **1**, 59

[25] Carter B. *Phys. Rev.*, **174**, (1968), 1559

[26] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений. Том 1,2.* – М., "Наука", 1982,1984

[28] Арнольд В. И. *Теория катастроф.* – М., "Наука", 1990

[29] Постон Т., Стюарт Й. *Теория катастроф и ее приложения.* – М., "Мир", 1980

[30] Tom R. *Topology*, **8**, (1969), 313

[31] Newman E. T. *Quantum theory and the structure of time and space.*, eds. Castell L. et al. – Munchen, Carl Verlag, 1975, p 48; *Gen. Rel. Grav.*, **7**, (1976), 107

[32] Gindikin S. G. *Math. Intelligencer*, **5**, (1983), 27

[33] Степанов В. Е. *Изв. ВУЗов, сер. мат.*, **1**, (1987), 72

[34] Кречет В. Г. *Изв. ВУЗов, сер. физ.*, **10**, (1986), 20; *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1995), 199

[35] Tod K. P. *Class. Quant. Grav.*, **13**, (1996), 2609

[36] Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* – М., "Мир", 1985

[37] Румер Ю. Б. *Спинорный анализ.* – М.-Л., ОНТИ, 1936

[38] Рыбаков Ю. П. *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10.* – М., Энергоатомиздат, 1979, с 194

[39] Журавлев В. Н. *Гравитация и электромагнетизм, вып. 6.*, ред. Богуш А. А. и др. – Минск, "Университетское", с 105

[40] Стражев В. И., Томильчик Л. М. *Электродинамика с магнитным зарядом.* – Минск, "Наука и техника", 1975

[41] Дирак П. А. М. *К созданию квантовой теории поля.*, ред. Медведев Б. В. – М., "Наука", 1990, с 169

[42] Владимиров Ю. С. *Системы отсчета в теории гравитации.* – М., "Энергоиздат", 1982

[43] Penrose R., MacCallum M. A. H. *Phys. Rep. C*, **6**, (1973), 241

[44] Robinson I. *J. Math. Phys.*, **2**, (1961), 290

[45] Уэллс Р. О. *Твисторы и калибровочные поля.*, ред. Жаринов В. В. – М., "Мир", 1983, с 169

[46] Кассандров В. В., Ризкалла Ж. А. *Геометризация физики II. Труды Межд. конф. памяти А. З. Петрова.*, ред. Башков В. И. – Казань, изд. КГУ, 1996, с 137

[47] Кассандров В. В., Ризкалла Ж. А. *Новейшие проблемы теории поля.*, ред. Аминова А. В. – Казань, изд. КГУ, 1998, с 176; (*Preprint* gr-qc / 9809078)

[48] Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. *Preprint* gr-qc / 9809056

[49] Ризкалла Ж. А. *Кандидатская диссертация.* – М., РУДН, 1999

[50] Kassandrov V. V., Rizcalla J. A. *Preprint* gr-qc / 0012109

[51] Kassandrov V. V., Trishin V. N. *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **5**, (1999), 272; (*Preprint* gr-qc / 0007026)

[52] Lopez C. A. *Phys. Rev.*, **D30**, (1984), 313

[53] Israel W. *Phys. Rev.*, **D2**, (1970), 641

[54] Буринский А. Я. *ЖЭТФ*, **66**, (1974), 406; *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11.* – М., Атомиздат, 1980, с 47