ГЛАВА XII

Александр В. Коганов
Научно-исследовательский институт системных
исследований Российской академии наук;
кафедра темпоральной топологии
Web-Института исследований природы времени
http://www.chronos.msu.ru; koganow@niisi.msk.ru

Индукторные пространства как обобщенная модель пространства-времени*

Моделирование пространства-времени как носителя различных природных процессов возможно в форме математических пространств с особым типом топологии – индукторных пространств. При этом удается доказать ряд новых теорем, относящихся к теории моделирования процессов, теории относительности и квантовой механике.

Ключевые слова: *топология, индуктор, индукция, процесс, автомат, относительность, автоморфизм, дифференцирование, пространство-время.*

1. Интерпретация понятия индукторного пространства

Среди многочисленных взглядов на время как на явление природы можно выделить представление о нем как о носителе причинно-следственных связей между событиями. В этом качестве время похоже на канал связи или на сеть, соединяющую все события в единое целое. Такая сеть пронизывает не только моменты времени, но и точки пространства, в которых распределены события. При этом пространственные связи симметричны в том смысле, что две точки пространства могут взаимно влиять друг на друга. Но во времени циклы причин и следствий запрещены. Это топологическое описание необратимости времени не есть его объяснение. Однако оно содержит в себе подсказку, какого рода топологические конструкции нужны для моделирования процессов, распределенных в пространстве

* Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00101а.

и времени, если требуется учитывать реальные свойства физического отношения причинности.

Таким топологиям с нарушенной симметрией отношения близости точек посвящена теория индукторных пространств. Сам термин возник от слова индукция (порождение) и относится к формированию события в точке под воздействием событий из ее пространственно-временной окрестности. Индукторное пространство как математическая конструкция состоит из множества точек, в которых происходят события, и из описания системы окрестностей для каждой точки. Для того, чтобы различать окрестность точки в обычных симметричных топологиях и в индукторных пространствах, для последних вводится термин *индуктор точки*. Главное конструктивное различие этих понятий в том, что в обычных топологиях задается общий класс открытых подмножеств точек, каждое из которых является окрестностью для любой из входящих в него точек, а в индукторных пространствах множество окрестностей (индукторов) задается отдельно для каждой точки. В обоих случаях имеются специальные требования, которым должны удовлетворять эти конструкции. В соответствующих теориях они играют роль аксиом.

Процесс на индукторном пространстве (индукторный процесс) описывается как оператор, задающий в каждой точке некоторое значение, интерпретируемое как состояние этой точки и как событие, ей соответствующее. В общем случае процесс предполагается неизолированным. Это значит, что на том же пространстве задан еще и некоторый внешний процесс, состояния которого влияют на состояния определяемого (основного) процесса. Внешний процесс называется распределенным управляющим воздействием, а его состояния – управлениями. Значение основного процесса в каждой точке может зависеть только от собственных состояний в других точках некоторого индуктора данной точки и от значений управляющих воздействий во всех точках этого же индуктора. При этом любой индуктор точки должен определить одно и то же ее состояние. Процесс управляющих воздействий не определяется однозначно, но оговаривается множество его возможных состояний и допустимых распределений этих состояний по пространству. Поэтому оператор основного процесса должен быть определен для всех таких распределений. Такой подход позволяет моделировать как внешние воздействия, так и внутренние законы формирования состояний процесса.

Как математическая конструкция индукторное пространство имеет группу автоморфизмов: биекций на себя, при которых образ и прообраз каждого индуктора любой точки является индуктором ее образа и прообраза соответственно. Аналогичные биекции между разными пространствами называются изоморфизмами. Имеется теорема о том, что любая формальная группа изоморфна некоторой группе всех автоморфизмов некоторого индукторного пространства. Причем таких неизоморфных между собой пространств для каждой группы бесконечно много. Такое пространство называется изображением группы, а его автоморфизмы – представлением группы. Некоторые изображения групп, возникающих в теоретической физике, имеют самостоятельный физический смысл и дают топологическую интерпретацию свойствам физических объектов.

Особенно надо отметить изображение группы Лоренца в форме так называемой конической индукции на четырехмерном действительном пространстве. Система причинно-следственных связей моделируется в ней конусами (индукторами), осью которых является ось времени, а образующие соответствуют мировым линиям света. При размерности пространства больше двух у таких индукций нет автоморфизмов, кроме лоренцевых. Таким образом, релятивистская физика приобретает интерпретацию в форме специальной несимметричной топологии физического вакуума как четырех- и более мерного объекта.

В любом индукторе можно выделить внутренние точки, каждая из которых входит в индуктор вместе с каким-то своим индуктором, и граничные, у которых такого индуктора нет. Это соответствует принятому в топологии понятию внутренней точки подмножества, которая входит в это подмножество со своей окрестностью.

Среди процессов особую роль играют такие, у которых состояние в точке определяется по состояниям на границе любого индуктора и по распределению воздействий на этом индукторе. Такие процессы обобщают несколько типов процессов, используемых в различных приложениях математики. К ним относятся конечные автоматы, алгоритмы, обычные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, удовлетворяющие единственности решения краевой задачи: решение в области восстанавливается по граничным условиям. Процессы этого класса по указанной аналогии назовем индукторными автоматами.

В общем случае не все процессы таковы. Но имеется класс пространств, на котором любой процесс может быть представлен как индукторный автомат. Необходимое и достаточное условие этого называется *аксиомой полноты границы*: у любого индуктора объединение всех индукторов точек границы и его самого совпадает с объединением всех индукторов входящих в него точек.

Этому свойству удовлетворяет большинство используемых в математическом моделировании пространств. Например, в евклидовом пространстве, где индуктором точки можно считать замыкание содержащего ее открытого множества, указанное объединение совпадает со всем пространством. А в описанном выше пространстве с конической индукцией такое объединение соответствует световому конусу в прошлое для некоторой точки. В компьютерных сетях это объединение дает все потенциальные источники информации для данного элемента сети.

Характерным (не единственным) примером, где аксиома полноты границы не выполняется, является пространство, в котором у некоторой точки имеется индуктор без границы, не содержащий все индукторы этой точки. Этот эффект возникает, например, в евклидовом пространстве, если индуктором точки считать открытое множество, ее содержащее. Этот пример показывает, что переход от топологии к индукторному пространству неоднозначен по существенным свойствам.

Нарушение единственности решения краевой задачи соответствует неустойчивому поведению моделируемого явления. Оно характерно для макробиологических, психологических и социальных процессов, турбулентных и вихревых потоков, и т. п. Математические модели в этих ситуациях позволяют прогнозировать только усредненные характеристики, но не каждую конкретную реализацию. Неустойчивость вызвана тем, что процесс в каждой точке пространства и времени подвержен влиянию своих состояний и внешних воздействий из ближайшей окрестности по принципу накопления малых отклонений.

Представление процесса в форме индукторного автомата может создать ситуацию неустойчивости, которая связана с наличием нескольких несовпадающих распределений состояния в пространстве, удовлетворяющих одинаковым глобальным граничным условиям на всем пространстве и локальным граничным условиям на каждом индукторе. При этом только одно из этих распределений будет удовлетворять исходному определению процесса. Разделом теории индукторных пространств является описание пространств, где все индукторные автоматы устойчивы, и формирование устойчивых автоматных представлений произвольного процесса на любом пространстве с аксиомой полноты границы.

Оператор, описывающий автоматное представление индукторного процесса, называется локальным уравнением этого процесса. Это прямое обобщение дифференциальных уравнений и функций перехода на состояниях логических автоматов. Имеется обобщение процедуры дифференцирования на индукторные пространства со специально введенной векторной мерой расстояния между точками (Коганов, 2002). Интересной особенностью таких локальных уравнений на пространствах с существенно несимметричной индукцией является ветвление решений в каждой точке, даже при аналитическом задании дифференциального оператора. Подобный эффект на дифференциальных уравнениях в обычных метриках достигается только на неаналитических операторах фрактального типа.

Например, уравнению $\frac{dy}{dx}=0$ при односторонней (например, левой) интерпретации производной по x удовлетворяют все ступенчатые функции, непрерывные слева. Такое дифференцирование на прямой соответствует индукторам точки, имеющим вид отрезков, правым концом которых является эта точка. При аналогичном использовании конической индукции в многомерных пространствах у решений возникают разрывы по границам индукторов (это секущие поверхности конусов), напоминающие коллапс волновой функции при квантовании. По крайней мере, любой процесс квантования может быть описан как такой разрыв решения релятивистского волнового уравнения в пространстве-времени.

Анализ уравнений теории относительности и квантовой механики как уравнений в конических пространствах показал неожиданную дополнительность (а не совпадение) математических типов операторов, решающих в этих науках одинаковые по смыслу задачи. В релятивизме кинематика описывается самосопряженными, а измерения – проекционными операторами, а в квантовой механике – наоборот. Это означает, что одни и те же термины в этих разделах физики имеют различный смысл. Содержательная причина этого эффекта еще не вполне ясна, но, вероятно, она в различии между усредненными измерениями по ансамблю в квантовой механике и единичными наблюдениями в макромире теории относительности. При этом разным методикам измерения соответствует одинаковая размерность измеренных физических величин, но они имеют разную интерпретацию. Например, получение нулевого усредненного значения означает не нулевую интенсивность измеряемой величины, а только компенсацию ее положительных и отрицательных значений.

Кроме указанных выше общих теоретических проблем, индукторные пространства удобны для конкретных приложений в естественных науках и технике. Они позволяют непосредственно учесть в модели известные связи между компонентами моделируемого объекта с учетом их направленности и топологии. После этого функционирование объекта моделируется как процесс в полученной индукции. Однако это направление выходит за рамки данной статьи, где нас будет интересовать только аспект моделирования физического времени как природного феномена.

Связь теории относительности с индукторными пространствами подробно описана в работе А.В. Коганова (1999б) и, косвенно, в книге Д.Э. Либшера (1980). В работах А.В. Коганова (1996; 1999а) использована более сильная аксиоматика индукции, чем в данной статье, но ссылки корректны. Необходимые сведения по квантовой механике можно получить, например, в курсе Э. Вихмана (1977), а по специальной теории относительности – в книге Д.Э. Либшера (1980). Классические математические понятия, использованные в данной работе, можно найти в учебнике П.С. Александрова (1977) и в Математическом энциклопедическом словаре (1988).

Ниже излагается математическая теория вышеописанных эффектов.

2. Индукторные пространства – основные определения

Определение 2.1. Отношением индукции (И-отношением) на множестве T называется некоторое подмножество $I \subset T \times 2^{T}$, элементы которого обозначаются $[t,V]_I$, где t – центр индукции элемента, V – индуктор точки t. Индукторным пространством $[T,I]$ (И-пространством) называется множество T и отношение индукции I на нем, удовлетворяющее аксиомам (обозначим $I(x)$ множество индукторов точки $x \in T$):

1. Аксиома принадлежности. Центр индукции принадлежит любому своему индуктору: $[t,V]_I \Rightarrow t \in V$.

2. Аксиома транзита. Если $[t,V]_I$ и $[t',U]_I$ для $t' \in V$, то $[t,V \cup U]_I$. Предполагается, что такие объединения можно делать для любого (возможно, трансфинитного) числа элементов индукции.

Такое отношение индукции I будем называть индукцией на множестве точек T.

Замечание 2.1. Любое отношение индукции J может быть преобразовано в индукторное пространство $[T,I]$ путем расширения всех индукторов по аксиоме принадлежности и расширения полученного отношения замыканием по аксиоме транзита. Обозначение $I = spase(J)$.

Замечание 2.2. Направленный граф (колчан) – это отношение вида $I \subset T^2$. Топология – отношение вида $I \subset 2^{T}$. Но колчаны и топологии могут быть описаны в форме индукторного пространства на том же множестве вершин и точек соответственно (Коганов, 1996; 1999а). Для топологии вводятся индукторы вида $[x,V]_I$, где V – любая окрестность $x \in T$. Для графа вводятся индукторы вида $[x,V]_I$, где V – любая n-окрестность по графу вершины $x \in T$. И далее надо воспользоваться замечанием 2.1.

Замечание 2.3. В приложениях индукцию на множестве можно интерпретировать как систему связей, обеспечивающую передачу информации, вещества или энергии по пространству (от индуктора к точке). Тогда аксиома транзита означает возможность последовательной передачи по нескольким точкам, а аксиома принадлежности – возможность передать из точки в себя. Эта интерпретация поясняет отнесение графов и топологий к индукциям. Однако ниже будут описаны индукции, не являющиеся ни графами, ни топологиями, но имеющие важные приложения (Коганов, 1996; 1999а). Следующие определения области и внутренности множества соответствуют топологической интерпретации, но понятие границы существенно иное.

Определение 2.2. Для подмножества $M \subset T$ обозначим αM подмножество точек, входящих в M вместе с одним из своих индукторов (внутренность M). Индукторной границей (И-границей) множества назовем $\beta M = M \backslash \alpha M$. Объединение $\varphi t = \cup V \mid [t,V]_I$ всех индукторов точки $t \in T$ назовем полным индуктором этой точки. Полным индуктором множества назовем $\varphi M = \cup \varphi t \mid t \in M$. Обозначим $\gamma t = \cup \beta V \mid [t,V]_I$.

Замечание 2.4. И-граница на топологическом пространстве, преобразованном в И-пространство по замечанию 2.2, у любого открытого множества пустая. Избежать этого можно, изменив элементы индукции на $[x,V']_I$, где V – любая окрестность $x \in T$, а V' – ее замыкание в топологии. Тогда $\beta V'$ совпадает с топологической границей V.

Определение 2.3. Индукция $[T,I]$ топологически сильнее индукции $[T,I']$, если для любого элемента $[t,V]_{I'}$ найдется элемент $[t,W]_{I'}$, в котором $W \subset V$. Две индукции на одном множестве точек $[T,I]$ и $[T,I']$ топологически эквивалентны, если обоюдно сильнее друг друга.

Замечание 2.5. Определенное выше отношение силы индукций соответствует стандартному определению для порожденных ими топологий (см., например, П.С. Александров, 1977). Если $I' \subset I$, то I сильнее I', но возможна и эквивалентность без точного совпадения индукций. Если две функции f и g на T *локально эквивалентны* в точке t по индукции (т. е. $f(t)=g(t)\forall_t \in V$ для некоторого $[t,V]_I$), то это сохраняется в более сильной или эквивалентной индукции.

3. Индукторные процессы и автоматы

Определение 3.1. Процессом на индукторном пространстве $[T,I]$ называется отображение вида $P{:}X^T \to Y^T$,

$$P{:}x(:\varphi t)| \to y(t) =_{def} P(x(:\varphi t),t) = P(x,t),$$

где X и Y – множества значений управляющего параметра $x(t)$ и значения процесса $y(t)$ (соответственно) в каждой точке $t \in T$; $x(:M)$ – распределение значений параметра (управления) по точкам указанного множества $M \subset T$; $P(x,t)$ – краткая запись.

Определение 3.2. Автоматом на И-пространстве называется отображение вида

$$A{:}X^T \times Y^T \to Y^T,\ A{:}(x(:V),\ y(:\beta V),t)| \to y(t) = A(x,y,[t,V]),$$

где $[t,V]_I$ – произвольный элемент индукции I. Значения процесса, заданного как автомат, называются состояниями. Процесс P представляется автоматом A, если его значение в каждой точке t может быть получено как функция от состояния этого автомата при одинаковом распределении управлений x.

Замечание 3.1. По определению процесс отображает распределенные по полному индуктору каждой точки управляющие параметры в значение процесса в этой точке. Автомат отображает управления, распределенные по внутренности индуктора произвольной точки, и состояния процесса, распределенные по границе этого индуктора, в состояние этой точки. Таким образом, автомат дает описание процесса через локальные связи между точками, определенные индукцией на пространстве. Известная конструкция конечного автомата получается из общего определения, если в качестве пространства использовать граф тактового времени ($1 \to 2 \to 3 \to \ldots$), в котором вершины обозначены их номерами, а индукторы точки j имеют вид $((j-k) \to (j-k+1) \to \ldots \to (j))$ с границей $\{(j-k)\}$ и внутренностью $\{(j-k+1) \to \ldots \to (j)\}$. Определение автомата принимает стандартный вид $y_j = A(x_{j-k},\ldots,x_j;y_{j-k})$, где A – матрица перехода на k тактов. Если обозначить произвольный элемент индукции вида $[t,V]_{I'}$ при фиксированном t через $loc(t)$, то уравнение автомата принимает вид $y=A(x,y,loc(t))$, которое назовем *локальным уравнением* процесса.

Определение 3.3. На пространстве выполняется условие *полноты границ*, если для любого индуктора V выполняется $\varphi V = V \cup \varphi\beta V$. Для удобства описания определим на классе распределений вида $f(:m)$, $m \subset T$ операцию объединения:

$$f(:m) \cup f'(:u) = f''(:m \cup u) = f(:m) \mid f'(:u \backslash m).$$

Распределения согласованы, если $f(:m \cap u) = f''(:m \cap u)$. В этом случае операция коммутативна. Значение функции $f(t)$ в этой операции можно рассматривать как одноточечное распределение $f(:\{t\})$.

Теорема 3.1. Для того чтобы на данном индукторном пространстве $[T,I]$ любой процесс был представим автоматом, необходимо и достаточно выполнение условия *полноты границ*. При этом представление может быть сделано одним автоматом для всех процессов с заданными множествами управлений и значений.

Доказательство. Необходимость. По определению $\varphi V \supset V \cup \varphi\beta V$. Допустим, $\varphi V \backslash (V \cup \varphi\beta V) = U \neq \varnothing$ для некоторого элемента индукции $[t,V]$. Тогда можно построить процесс, не представимый автоматом. Введем множества управлений и значений процесса $X=Y=\{0;1\}$. Выберем точку $t'' \in U$. Определим $P(x,t')=0$ при $t' \neq t$ для всех управляющих распределений $x(:T)$; $P(x,t)=x(t'')$. Тогда для любого автомата A с множеством состояний S значение $s(t)=A(x(:\alpha V),s(:\beta V),t)$ не зависит от $x(t'')$, поскольку $t'' \notin \varphi\beta V \cup \alpha V$. Значит, автомат не представляет P. Достаточность. Пусть условие полноты границы выполняется и P – некоторый процесс с управлениями из X и значениями из Y. Определим множество состояний автомата как множество S всех распределений вида $x(:\varphi t), t \in T$. Определим процесс $s(t)=x(:\varphi t)$. Тогда для каждого $[t,V]_I$ имеет место равенство

$$s(t)=x(:\alpha V)\cup x(:\varphi\beta V)=x(:\alpha V)\cup s(:\beta V)=_{def}A(x,s,[t,V]),$$

где использовано объединение распределений на непересекающихся множествах. Это уравнение автомата. С другой стороны, $P(x,t)=P(x(:\varphi t),t)=P(s(t),t)$, что означает представимость процесса построенным автоматом.

Определение 3.4. Локальное уравнение называется *устойчивым*, если при каждом распределении управлений $x(:\alpha T)$ и любом распределении граничных состояний $y(:\beta T)$ оно имеет ровно одно решение $y(:T)$. Процесс называется *локально устойчивым*, если он представим автоматом и его локальное уравнение устойчиво. И-пространство называется *локально устойчивым*, если любое локальное уравнение на нем устойчиво. И-пространство $[T,I]$ называется условно устойчивым, если имеется подмножество элементов индукции $J \subset I$, которое топологически эквивалентно I и представимо как объединение локально устойчивых индукций. (В этом случае любое локальное уравнение можно рассматривать как устойчивое при ограничении $loc(t) \in J$ с сохранением локальности описания процесса). Локальная устойчивость является и условной. Множество J назовем (локально устойчивым) топологическим структурированием индукции.

Для анализа устойчивости потребуются следующие понятия.

Определение 3.5. Транзитивной цепью в индукции $[T,I]$ называется последовательность вида $[t_1,V_1]_I$, $[t_2,V_2]_I,\ldots$, где $t_{i+1} \in \beta V_i; i=1,\ldots$

Определение 3.6. Индикаторным автоматом называется следующее локальное уравнение с множеством состояний $\{0;1\}$, не зависящее от управлений:

$$y(t)=\max\{y(t') \mid t' \in \beta loc(t)\}. \qquad (3.1)$$

Теорема 3.2. Для локальной устойчивости индукции необходимо и достаточно, чтобы все транзитивные цепи были конечны (в частности, не циклические).

Доказательство. Необходимость. Допустим, имеется бесконечная или циклическая транзитивная цепь. Обозначим $W=\cup\beta V_i \mid i=1,\ldots$ Построим два распределения состояния $y(:T)$ и $y'(:T)$. Положим $y'\equiv 0$; $y(:\beta T)\equiv 0$ а для $t \notin \beta T$

$$y(t)=\begin{cases}0-\textit{если } \gamma t \cap W=\varnothing\\ 1-\textit{иначе}\end{cases}.$$

Оба распределения являются решением (3.1). Но они не совпадают как минимум на всех V_i. Это следует из того, что каждый из этих индукторов содержит точку границы из W вне границы пространства βT, так как допускает продолжение транзитивной цепи. Следовательно, $y(:V_i)=1$. Достаточность. Если условие теоремы выполнено, то при любом выборе покрытия $loc(t)$ на T граница T полностью покрыта границами элементов покрытия T, которые завершают максимальные транзитивные цепи. Следовательно, на центрах соответствующих элементов покрытия решение произвольного заданного локального уравнения определено однозначно граничным условием. Обозначим это множество точек W_I. Рассмотрим множество элементов покрытия, которые не вошли в предыдущее, но являются предпоследними элементами некоторых максимальных транзитивных цепей. Тогда их границы полностью лежат в $\beta T \cup W_I$. Следовательно, однозначно определены состояния в центрах соответствующих элементов покрытия.

Обозначим их множество W_2. Продолжая такие построения, получим однозначное состояние на точках W_3, W_4,.... При этом по условию каждая точка $t\in T$ попадет в одно из этих множеств с конечным номером.

Следствие 3.1. Индикаторный автомат устойчив только на локально устойчивых пространствах (и на всех из них). Это следует из доказательства необходимости и того, что уравнение (3.1) определено на всех индукторных пространствах. Это значит, что если на заданной подиндукции $I'\subset I$ устойчив индикаторный автомат, то (и только тогда) устойчиво любое локальное уравнение с элементами $loc(t)\in I'$.

Следствие 3.2. И-пространство условно устойчиво тогда и только тогда, когда имеется подмножество элементов индукции $J\subset I$, которое топологически эквивалентно I и представимо как объединение индукций I', удовлетворяющих условию теоремы 3.2.

Следствие 3.3. Класс локально устойчивых пространств состоит из колчанов без циклов, в которых все цепочки против стрел конечны.

Следствие 3.4. Важным примером условно устойчивых пространств является полупространство с конической индукцией, ограниченное гиперплоскостью, секущей для всех конусов – индукторов (Коганов, 1996; 1999б). Такая индукция в полном пространстве R^n определяет преобразования Лоренца как полную группу своих автоморфизмов при размерности выше 2, и волновое уравнение является в ней инвариантным автоматом. Условная устойчивость полупространства означает единственность решения краевой задачи для этого уравнения.

Класс пространств, допускающих устойчивые представления процессов локальными уравнениями, значительно расширяется с помощью следующих понятий.

Определение 3.7. Пространство назовем *квазиустойчивым*, если любой процесс, представимый некоторым автоматом, может быть представлен устойчивым локальным уравнением. Пространство условно квазиустойчиво, если существует квазиустойчивое топологическое структурирование J индукции I (по аналогии с определением 3.4).

Теорема 3.3. Квазиустойчивость эквивалентна условию: при любом покрытии $\{loc(t)\mid t\in T\}$ от любой точки t (как от t_1) имеется конечная транзитивная цепь до любой точки $t'\in\beta\varphi t, t'=t_n$. Соответственно, условная квазиустойчивость означает наличие топологического структурирования, все индукции которого удовлетворяют этому условию.

Доказательство. Достаточность. Пусть процесс P имеет представление некоторым локальным уравнением $y(t)= =A(x,y,loc(t))$. Введем новое множество значений для процесса, состоящее из распределений состояний y по различным подмножествам: $Z=\{z=y(:m)\mid m\subset T\}$. Построим локальное уравнение

$$z(t)=y(:\beta\varphi t)=\cup y(:\beta\varphi t')| t'\in\beta loc(t).$$

Заметим, что при любом распределении $y(:T)$ объединяются согласованные распределения. В силу существования конечных транзитивных цепей от t до точек границы $\beta\varphi t$ это устойчивое уравнение. Поскольку $t\subset\beta T$, то по значениям $\{(t',z(t'))\mid t'\in\beta loc(t)\}=z(:loc(t))$ и $x(:loc(t))$ можно однозначно восстановить состояние $y(t)=A(x(:\varphi t),\ y(:\beta\varphi),t)$, соответствующее значениям процесса $P(x,t)$. Это означает, что z дает устойчивое представление P. Необходимость. Предположим, при некотором покрытии $loc(t)$ для некоторой точки t нет конечной транзитивной цепи до некоторой точки $t'\in\beta\varphi t$. Это означает, в частности, что можно построить бесконечную транзитивную цепь $[t_i,V_i]_I, i=1,...,$ с началом в $t=t_1$. В качестве процесса P рассмотрим индикаторный автомат. Как показано выше, его локальное уравнение на этом покрытии неустойчиво. Рассмотрим отношение индукции I', состоящее из элементов этого покрытия. Допустим, имеется устойчивое локальное уравнение с некоторым множеством значений Z (и не зависящее от управлений) вида $z(t)=A(z(\beta loc(t)),t)$ такое, что $P(t)\mid_{y(:\beta\varphi t)}=y(t)=f(z(t))$. Пусть распределение $z(:T)$ соответствует граничному условию $y(:\beta T)$, где $y(t')=0$, а $z'(:T)$ соответствует $y'(:\beta T), y'(t'')=y(t'')$ при $t''\neq t'$, $y'(t')=1$. Обозначим $W=\cup\beta V_i\mid i=1,..., Q=\{t''\mid \beta loc(t'')\cap W\neq\varnothing\}$. Положим $z''(:Q)=z'(:Q)$, $z''(T\setminus Q)= =z(:T\setminus Q)$. По определению W, оба распределения z и z'' согласованы с граничными условиями $y(:\beta T)$, поскольку точка $t'\notin W$. Положим $y'(:T\setminus\{t'\})=y(:T\setminus\{t'\})=0$. Тогда $f(z(t))=0$, а $f(z''(t))=1$, что противоречит предположению устойчивости локального уравнения $z=A$.

Следствие 3.5. Индукторное пространство, порожденное евклидовой топологией на областях с границей, не является ни условно устойчивым, ни квазиустойчивым, но является условно квазиустойчивым. В качестве квазиустойчивого топологического структурирования можно выбрать покрытия шарами с данным радиусом, который в этом случае является параметром отношения индукции.

Замечание 3.2. Факт, указанный выше, является причиной, по которой в уравнениях математической физики приходится ограничивать класс функций условием достаточной гладкости. Оно обеспечивает единственность решения краевой задачи, поскольку делает представительными разностные схемы с конечными шагами. С другой стороны, это же условие позволяет записывать локальные операторы в дифференциальной форме. В общем случае можно приблизить форму локальных уравнений к уравнениям в частных производных, определяя не только значение функции в точке, но и ее класс локальной эквивалентности.

Теорема 3.4. Если задано локальное уравнение $y(t)==A(x,y,loc(t))$, то оно эквивалентно уравнению

$$y(:loc(t))=A'(x,y,loc(t))=A'(x(:loc(t)),\ y(:\ loc(t)))$$

для некоторого оператора A'.

Лемма 3.1. У каждой внутренней точки $t'\in\alpha V$ индуктора $[t,V]_I$ имеется индуктор $[t',W]_I$ такой, что $\beta W\subset\beta V$. *Доказательство*. Допустим обратное: у некоторой $t'\in\alpha V$ любой индуктор W' имеет $u'=\beta W'\backslash\beta V\neq\varnothing$. Рассмотрим $W=\cup W'\,|\,[t',W']_I,W'\subset V$. По аксиоме транзитивного объединения $[t',W]_I$. Обозначим u' для W через u. Тогда по предположению и по аксиоме транзитивного объединения, точки u не имеют индукторов внутри V, иначе индуктор такой точки вошел бы в W, а это противоречит $u\subset\beta W$. Следовательно, $u\subset\beta V$, что противоречит предположению. Лемма доказана, из нее непосредственно следует теорема 3.4, если положить

$$A'(x(:loc(t)),y(:\beta loc(t)))=y(:\beta loc(t))\cup\cup A(x,y,loc(t'))\,|\,t'\in\alpha loc(t)\&\beta loc(t')\subset\beta loc(t).$$

4. Проекционный оператор локального уравнения

Определение 4.1. Идемпотентным оператором p, действующим на некотором множестве S, называется отображение $p{:}S\to S$, удовлетворяющее соотношению $p^2=p$. Проекционным оператором называется линейный идемпотентный оператор, действующий на линейном пространстве (см., например, Математический энциклопедический словарь, 1988).

Теорема 4.1. Устойчивое локальное уравнение при каждом распределении управлений определяет идемпотентный оператор на множестве распределений состояний на индукторном пространстве, который отображает произвольное распределение состояний в распределение, являющееся решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть на $[T,I]$ задано устойчивое локальное уравнение $y(t)=A(x,y,loc(t)),\ t\in T,\ y(t)\in Y,\ x(t)\in X$. Считаем распределение управлений $x(:T)$ фиксированным. Тогда каждому распределению состояний $y(:\beta T)$ соответствует единственное решение $y(:T)$, которое обозначим $A|y(:\beta T)$. Рассмотрим произвольное распределение состояний $y'(:T)$. Определим оператор $py'=A|y'(:\beta T)=y(:T)$. По определению решения локального уравнения $y'(:\beta T)=y(:T)$. Но тогда $p^2y'=py=A|y(:\beta T)==A|y'(:\beta T)=y(:T)=py'$. В силу произвольности исходного распределения y' доказана идемпотентность оператора p.

Определение 4.2. Для произвольного отображения вида $p{:}S\to S$ (на некотором множестве S) назовем стандартным линейным представлением (над алгебраическим полем k) линейный оператор H_p на пространстве $L(S,k)$ функций вида $f{:}S\to k$, определенный равенством: $H_pf(s)=f(ps),\ s\in S$.

Теорема 4.2. Стандартное линейное представление имеет следующие свойства:

a) Для любых двух отображений p и q на общем множестве S верно $H_{pq}=H_qH_p$.

b) Отображение p однозначно определяется по H_p его действием на функции – индикаторы подмножеств.

c) Если p действует как биекция на некотором подмножестве $W\subset S$ и J_W – индикатор подмножества W, то левый линейный оператор J_WH_p, где умножение на функцию поточечное, действует как представление группы степеней p на пространстве $L(W,k)$.

d) Если p – идемпотентный оператор, то ему соответствуют подмножества прообразов точек $s\in S$ (возможно, пустые для некоторых точек) $b(s)=\{s'|ps'=s\}$, и pS – множество стационарных точек p. Тогда H_p – проектор на подпространство собственных функций, которые определяются уравнением $f(s')=f(s)$ при $s'\in b(s)$.

Эти свойства проверяются непосредственно из определений.

Следствие 4.1. Если локальное уравнение устойчиво, то ему соответствует проекционный оператор на пространстве функционалов, определенных на распределениях состояний процесса. В частности, это верно для уравнений в частных производных, удовлетворяющих условию единственности решения краевой задачи. Заметим, что сам оператор перехода от произвольного распределения состояний к решению уравнения может не быть линейным, даже если линеен дифференциальный оператор уравнения. Этому мешает фиксированная правая часть уравнения, не содержащая искомой функции – решения. Однако он всегда идемпотентный.

Следствие 4.2. Теория относительности (ТО) и квантовая механика (КМ) имеют взаимно дополнительные типы операторов кинематики и измерения (табл. 1).

Табл. 1. Операторная структура КМ и ТО

Тип оператора	Кинематика	Измерение
Теория относительности	самосопряженный (преобразования Лоренца)	проекционный (ортопроекция событий на мировую линию наблюдателя)
Квантовая механика	идемпотентный (решение краевой задачи в уравнении Шредингера)	самосопряженный (эрмитовы операторы на пространстве волновых функций)

5. Пространства с конической индукцией

Определение 5.1. *Коническим пространством* $Rc[n]$ называется индукция на R^n, где порождающей системой индукторов точки y являются конусы, записываемые в некоторой системе координат $x_1,...,x_n$ в виде

$$0\le(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2-...-(x_n-y_n)^2,\ 0\le x_1\le H,\ H>0.$$

Если требовать $|x_1|\le H$, то пространство называется *биконическим* $Rb[n]$. Автоморфизмы по структуре индукторов являются *автоморфизмами пространства*; обозначение, в частности, $aut\ Rb[n]$ или $aut\ Rc[n]$.

Известно (Коганов, 1996), что для $Rb[n]$ и $Rc[n]$ все линейные автоморфизмы образуют каноническое действие группы Лоренца $Lor[n]$ на R^n, а инвариантные, с точностью до коэффициента, метрики – это метрики Минковского. Ниже описана

полная группа автоморфизмов (не только линейных). Поскольку коническая индукция инвариантна относительно параллельного сдвига, следующие теоремы сформулированы и доказаны для неподвижного начала координат.

Теорема 5.1. $aut\ Rc[1]$ – это все положительно монотонные автоморфизмы R^1;

$$aut\ Rc[2]=aut\ Rc[1]\times aut\ Rc[1]\times S_2{:}R^2,$$

где действие S_2 – инверсия оси x_2, т. е. перестановка образующих плоского конуса;

$$aut\ Rc[n]=Lor[n]\ R_+{:}R^n,\ n\ge3,$$

где действие R_+ – равномерное растяжение на R^n.

Теорема 5.2. $aut\ Rb[1]$ – это все монотонные биекции R^1, т. е.

$$aut\ Rb[1]=aut\ Rc[1]\times S_2{:}R^1;$$

$$aut\ Rb[2]=aut\ Rc[1]\times aut\ Rc[1]\times S_2\times S_2{:}R^2,$$

где действие $S_2\times S_2$ – инверсия осей R^2 – перестановка образующих и инверсия оси конуса;

$$aut\ Rb[n]=Lor[n]\times R_h{:}R^n \text{ при } n>3,$$

где действие R_h – равномерное растяжение и инверсия оси конуса.

В обеих теоремах действие $Lor[n]$ – каноническое действие аффинной группы Лоренца. Таким образом, это действие фактически определяется инвариантностью конической индукции при размерности выше 2.

Доказательство теорем. Группы $aut\ Rb[n]$ и $aut\ Rc[n]$ отличаются только прямым домножением на инверсию оси конуса x_1, которая обусловливается соответствующей симметрией порождающей системы биконической индукции. Достаточно провести доказательство для конической индукции.

Случай n=1. В этом случае коническое пространство – это «направленная прямая»: окрестностью точки является отрезок, в котором эта точка – его правый (для определенности) конец. Непрерывные отображения в такой индукции – это функции, непрерывные слева. Автоморфизм как непрерывная биекция на себя может быть только (и любой) строго монотонной непрерывной действительной функцией, не ограниченной в обе стороны.

Случай n=2. В этом случае конус – индуктор точки – это угол с вершиной в точке. При автоморфизме этот угол не меняется, поскольку у всех конусов индукторов этот угол одинаков (базовый угол) и соответственные стороны разных углов параллельны. Перейдем в систему координат, оси которой параллельны сторонам базового угла пространства с началом в некоторой точке (0,0) и направляющими e, t. На линиях этих векторов порождена индукция направленной прямой. Если U – автоморфизм, то либо

$$U(x,y)=U(xe+yt)=U(0,0)+V(x)e+W(y)t,$$

где V, W – автоморфизмы направленной прямой, либо

$$U(x,y)=U(xe+yt)=U(0,0)+V(x)t+W(y)e,$$

где V, W – их взаимные гомеоморфизмы. Это соответствует теореме 5.1.

Случай $n=3$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что все автоморфизмы линейны, т. е. переводят прямые линии только в прямые, поскольку группа линейных автоморфизмов конуса совпадает с действием группы Лоренца. Введем термины. И-конус – конус с неограниченной образующей, объединяющей все индукторы одной точки. С-линия – прямая, продолжающая образующую И-конуса. С-плоскость – плоскость, в каждой точке касательная к некоторому И-конусу. Т-линия – прямая, идущая внутри И-конуса. Т-плоскость – плоскость, образованная параллельными Т-линиями. Р-плоскость – секущая плоскость для И-конусов. Р-линия – прямая, лежащая в Р-плоскости. Соответственно, будем обобщенно говорить о С-объектах, Т-объектах и Р-объектах.

Лемма 5.1. Автоморфизм конического пространства непрерывен в топологии R^n.

Доказательство. Предположим, что последовательность точек $r(1),r(2),\ldots$ сходится к точке r. Тогда можно построить последовательность вложенных И-конусов $(K(i)|i=1,\ldots)$ с вершинами в некоторых точках $g(1),g(2),\ldots$ и высотами $H(1),H(2),\ldots$, где $\lim_{i\to\infty} g(i)=r$, $\lim_{i\to\infty} H(i)=0$, причем все $r(j)$, $j\geq i$ содержатся внутри конуса $K(i)$. Единственной общей точкой всех конусов является точка r. После применения произвольного автоморфизма u И-конусы $K(1),K(2),\ldots$ перейдут во вложенную систему И-конусов $\{uK(i)|i=1,\ldots\}$ с единственной общей точкой ur. При этом образы $ur(j),j\geq i$, содержатся внутри И-конуса $uK(i)$. Отсюда следует, что $\lim_{i\to\infty} ur(i)=ur$. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. Любая Р-прямая является пересечением двух С-плоскостей.

Доказательство. Любая плоскость, касательная по образующей к И-конусу, является С-плоскостью. Рассмотрим Р-прямую L. По определению она не лежит внутри какого-либо И-конуса. Выберем точку r на L и расположим там вершину И-конуса, не имеющего с L других точек пересечения. Проведем две касательные плоскости к конусу, проходящие через L. Такие плоскости всегда существуют для конуса и прямой, проходящей через вершину с внешней стороны. Поскольку любая плоскость, касательная к И-конусу, является С-плоскостью, то лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. Любой автоморфизм переводит С-объект в С-объект и Р-объект в Р-объект того же типа. Т-линия переходит в непрерывную линию внутри И-конуса (не утверждается, что в прямую).

Доказательство. По определению автоморфизма образ и прообраз любого И-конуса является И-конусом. Поскольку биекция строго монотонна по вложению подмножеств, граница (поверхность) И-конуса переходит в поверхность образа. Любая С-линия есть линия касания двух И-конусов, один из которых внутри другого (касание по образующей). Это пересечение двух поверхностей И-конусов, которое переходит в аналогичное касание, т. е. образ С-линии опять С-линия. Тогда С-плоскость переходит в непрерывное множество, состоящее из непересекающихся С-линий. На произвольной С-плоскости В выберем произвольную точку r и проведем через нее С-прямую L, по которой B касается конуса K. По каждой такой прямой С-плоскости касается бесконечно много И-конусов, вершины которых лежат на L. Рассмотрим последовательность И-конусов $(K(i)|i=1,\ldots)$, вершины которых $g(1),g(2),\ldots$ неограниченно удаляются от r по L. Тогда кривизна поверхности конуса $K(i)$ в точке r с ростом i убывает до 0. Это означает поточечную сходимость поверхностей $K(i)$ к B в том смысле, что расстояние каждой точки С-плоскости до ближайшей точки поверхности конуса стремится к нулю. Это расстояние для каждого i – непрерывная функция точки плоскости, поэтому на любом ограниченном подмножестве плоскости B сходимость равномерная. По лемме 5.1 при любом автоморфизме образ B будет поточечным пределом образов поверхностей конусов $K(i)$, а это снова будет С-плоскость, поскольку автоморфизмы сохраняют вложенные системы И-конусов. Таким образом, все С-объекты при автоморфизмах переходят в С-объекты того же типа.

По лемме 5.2 образ Р-прямой является пересечением образов двух С-плоскостей, а это, по доказанному выше – пересечение двух С-плоскостей, внешнее к И-конусу (образу И-конуса из доказательства леммы 5.2), т. е. Р-линия. Поскольку на Р-плоскости все линии являются Р-линиями, то при автоморфизме все прямые на Р-плоскости перейдут в прямые. Любые три прямые, пересечение которых образует треугольник, переводятся автоморфизмом в такие же прямые. В силу непрерывности (лемма 5.1) и биективности автоморфизма этот треугольник образов определяет плоскость, являющуюся образом исходной. Все прямые в образе будут Р-прямыми, поэтому образ остается Р-плоскостью.

Внутренность И-конуса переходит при автоморфизме во внутренность И-конуса. Поэтому из леммы 5.1 следует переход Т-линии в непрерывную линию внутри образа И-конуса. Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. Автоморфизмы линейны на С-объектах и Р-объектах.

Доказательство. Для Р-плоскости это доказано при доказательстве леммы 5.3. Поскольку каждая Р-прямая принадлежит какой-то Р-плоскости, то автоморфизм линеен и на ней. На С-плоскости, касательной к И-конусу и, следовательно, не входящей в него, все прямые – либо С-прямые, либо Р-прямые. Каждая из этих прямых переходит при автоморфизме в прямую. Значит, автоморфизм линеен на С-плоскости. Поскольку каждая из С-прямых входит в какую-нибудь С-плоскость, то и на С-прямых отображение линейное. Лемма 5.4 доказана.

Завершение доказательства теоремы. Зададим некоторую Р-плоскость A и С-линию B. Любая точка R^n может быть разложена в векторную сумму $x=a+b$, $a=a(x)\in A$, $b=b(x)\in B$. Любая прямая в R^n для некоторых векторов $a\in A$, $b\in B$ может быть записана в параметрической форме $x(t)=at+bt$, t – действительное число. При каждом t точку x можно интерпретировать как конец ломаной, построенной из двух отрезков at и bt, которую запишем $ta*tb$. После применения автоморфизма u эта ломаная (по лемме 5.4) перейдет в $tua*tub$. Разложив образы по исходному базису, получим

$$ua=v+w;\ ub=f+g, \text{ где } v,f\in A;\ w,g\in B;\ ux(t)=t(v+f)+t(w+g),$$

но это значит, что произвольная прямая в коническом пространстве переводится автоморфизмом в прямую, т. е. при $n=3$ все автоморфизмы линейны.

Случай $n>3$. Заметим, что в доказательстве для $n=3$ нигде не было использовано отображение конического пространства на себя. Доказано, что гомеоморфный образ трехмерного конического пространства всегда – линейное отображение. Допустим, это доказано для $n=m$. Перейдем к $n=m+1$. Математическая индукция. Выберем некоторый базис: $R^n=L\{e_0,e_1,...,e_n\}$, e_0 – ось И-конуса. Можно записать алгебраическую сумму: $R^n=L\{e_0,e_1,...,e_m\}+L\{e_0,e_1,...,e_{m-2},e_n\}$. Каждое из слагаемых – m-мерное коническое пространство. При автоморфизме (или изоморфизме) u, по предположению индукции, образы этих подпространств будут подпространствами того же типа, причем отображение u действует на них как линейное. Из биективности отображения u следует сохранение размерности пространства. Если задана некоторая прямая $l\subset R^n$, то всегда можно выбрать e_1,e_2 так, чтобы $l\subset L\{e_0,e_1,e_2\}$, и, следовательно, $l\in L\{e_0,e_1,...,e_m\}$. Это достигается последовательной ортогонализацией тройки векторов $e_0,v,w-v$, где w и v – любые две различные точки на прямой l. Поэтому образ ul будет прямой линией. Это завершает индукцию и доказательство теоремы.

6. Дифференциалы на индукторных пространствах

Определение 6.1. Для подмножества M на индукторном пространстве $[T,I]$ назовем предельной точку x, в любом индукторе которой есть точки из M. Множество таких точек назовем пределом M и обозначим

$$Lim(M|I)=\{x|[x,U]_I\Rightarrow U\cap M\neq\varnothing\}. \quad (6.1)$$

Определение 6.2. Если на множестве T задано две индукции I и J, то назовем J непрерывной по I, если предел любого множества по J содержит предел этого множества по I:

$$\forall M\subseteq T\ Lim(M|I)\subseteq Lim(M|J). \quad (6.2)$$

Определение 6.3. Вектор-расстоянием на индукторном пространстве $[T,I]$ назовем вектор-функцию вида $r{:}T^2\rightarrow R^n$, где n – размерность расстояния:

$$r(x,y)=(r_1(x,y),...,r_n(x,y)) \text{ для } x,y\in T,\ r_i(x,y)\in R. \quad (6.3)$$

Модуль-расстоянием для вектор-расстояния r назовем его норму

$$|\,r\,|(x,y)=\|\,r(x,y)\,\|=\sqrt{((r_1)^2,...,(r_n)^2)},\quad x,y\in T. \quad (6.4)$$

Для данного вектор-расстояния *шаром* радиуса z с центром в точке x назовем множество точек

$$S_r(x,z)=\{y|\,|r|(x,y)\le z\}. \quad (6.5)$$

Обозначим I_r индукцию, порожденную шарами как индукторами центров:

$$I_r=spase\{[x,S_r(x,z)]\,|\,x\in T;\ z>0\}. \quad (6.6)$$

Потребуем $r(x,x)=0$ и непрерывность I_r по I в смысле (6.2).

Замечание 6.1. Использованная в (6.4) евклидова норма вектор-расстояния не является обязательной. Требование непрерывности по индукции совпадает для топологически эквивалентных норм.

Определение 6.4. Локальным оператором Q со значениями в множестве M на классе функций F с областью определения T, на которой задана индукция I, называется отображение $Q{:}F\times I\to M$, обладающее следующим свойством. Если $f,g\in F$, и для некоторого индуктора $V\in I(x)$ $f(y)=g(y)$ при всех $y\in V$, то

$$Q(f,W)=Q(g,W)\quad \forall W\in I(x). \quad (6.7)$$

В частности, $Q(f,W)=Q(f,W')$ для всех $W,W'\in I(x)$, $x\in T$. Это значение будем считать значением оператора для функции f в точке x, хотя оно зависит от значений функции в некотором (любом) индукторе этой точки, и обозначать $Q(f)(x)$.

Ранее было доказано, что локальными операторами можно описывать любые процессы на И-пространствах, если выполнены некоторые дополнительные требования к индукции. Ниже строится обобщение понятия производной и дифференциала в форме локальных операторов на функциях.

Определение 6.5. Пусть имеются два индукторных пространства $[T,I]$, $[P,J]$ и некоторое отображение $q{:}I\to P$. Скажем, что точка $y\in P$ входит в *минорный предел* по q в точке $x\in T$, если для любого $W\in I(x)$

$$y\in Lim(\{q(x,V)|V\in I(x),V\subset W\}\ J). \quad (6.8)$$

Обозначение: $y\in Lim(q)\_I(x)$ или $y=lim(q)\_I(x)$, если предельная точка единственная.

Утверждение 6.1. Локальный оператор (6.7) всегда можно представить в форме минорного предела D. Действительно, зададим на множестве $P=M$ индукцию $J=\{[y,\{y\}]_J|y\in M\}$. Тогда $Q(f)(x)=lim(Q(f,.))\_I(x)$.

Утверждение 6.2. Если в индукторном пространстве $[T,I]$ для некоторой точки $x\in T$ выполнено $\bigcap I(x)\in I(x)$, то для любого оператора q из определения 6.5

$$q(x,\bigcap I(x))=lim(q)\_I(x) \quad (6.9)$$

Достаточно подставить в (6.8) $W=\bigcap I(x)$. Тогда имеется единственное $V=W$, что и доказывает единственность предела.

Следствие. В условиях утверждения 6.2 все локальные операторы в точке $x\in T$ имеют вид

$$Q(f)(x)=Q(f,\bigcap I(x)). \quad (6.10)$$

Определение 6.6. Предположим, что на индукторном пространстве $[T,I]$ с n-мерным вектор-расстоянием r задана мера L, по которой измеримы все индукторы. Для числовой функции $f{:}T\to K$, где K – используемое числовое поле, назовем линейной аппроксимацией на элементе индукции $[x,V]_I$ n-вектор $B=B(x,V)$, для которого достигается

$$\min\left\{\int_{y\in V}\|\,f(y)-f(x)-Br(x,y)\,\|\,dL(y)\right\}, \quad (6.11)$$

где произведение векторов скалярное.

Замечание 6.2. Если использовать норму вариации на функциях, то можно определить линейную аппроксимацию без меры:

$$B=B(x,V):\min_{B\in K^n}\max_{y\in V}\left\{\left|\int_{y\in V} f(y)-f(x)-Br(x,y)\right|\right\}. \quad (6.12)$$

Более общая формула использует произвольную норму $N_V\{.\}$ на пространстве функций с областью определения V:

$$B=B(x,V):\min_{B\in K^n}N_V\left\{|f(y)-f(x)-Br(x,y)|\right\}. \quad (6.13)$$

Такой комплекс будем обозначать $[T,I;r,N,K]$. Возможна неоднозначность вектора B.

Определение 6.7. *Индукторная производная* (И-производная) функции f в точке x на пространстве $[T,I;r,N,K]$ определяется как

$$f' = \frac{df}{dr} = \lim(B)\_I(x). \qquad (6.14)$$

Это определение выделяет класс И-дифференцируемых (в точке, на пространстве или на его подмножестве) функций, для которых есть единственность предела (6.14).

Определение 6.8. *Вариативная индукторная производная* допускает множество возможных значений в точке:

$$\{f'\} = \left\{\frac{df}{dr}\right\} = Lim(B)\_I(x). \qquad (6.15)$$

Замечание 6.3. Если поле K пополнено до компакта, то (6.15) – непустое множество для любой функции в любой точке. Поэтому вариативная производная не выделяет специального класса функций. Неоднозначность значения (6.15) может быть обусловлена как предельным переходом, так и неоднозначностью значений $B(x,V)$.

Теорема 6.1. Если функция f И-дифференцируема в точке x, то для любого $V\in I(x)$

$$N_V\{f(.)-f(x)-Br(x,.)\} \le N_V\{f(.)-f(x)-f'(x)r(x,.)\}+N\{Ar(x,.)\}, \qquad (6.16)$$

где $A\in K^n$, $\lim(\|A\|)\_I(x)=0$. (6.17)

Доказательство. По условию выполнено условие сходимости (6.14). Это значит, что для любого $a>0$ существует индуктор $W\in I(x)$ такой, что для любого индуктора $V\subset W$ выполняется $\|B(x,V)-f'(x)\|<a$. Обозначим $A=B(x,V)-f'(x)$. Тогда $\|A\|<a$, откуда следует (6.17). По определению

$$f(y)-f(x)-Br(x,y) = f(y)-f(x)-f'r(x,y)-Ar(x,y), \qquad (6.18)$$

откуда (6.16) следует как неравенство треугольника для нормы N_V.

Определение 6.9. Функция f имеет в точке x на пространстве $[T,I;r,N,K]$ сильную производную, если

$$\lim\left(\frac{N_V\{f(.)-f(x)-B(x,V)r(x,.)\}}{\|r(x,.)\|_V}\right)\_I(x)=0. \qquad (6.19)$$

Утверждение 6.3. Если функция $f(.)$ имеет в точке x сильную производную, то она имеет И-производную $f'(x)$, которую в этом случае будем обозначать $f^*(x)$.

Доказательство. Предположим, что И-производная не определена. Тогда множество $\{f'(x)\}$ содержит более одной точки. Пусть $B_1,B_2\in\{f'(x)\}$, $B_1\ne B_2$. Тогда имеется два подмножества элементов индукции $J_1,J_2\in I(x)$, для которых $\lim(B(x,V))\_J_i=B_i$, $i=1,2$. Следовательно, $|B_1-B_2|=O(\|r\{x,.\}\|_V)$, откуда

$$N_V\{f(.)-f(x)-B(x,V)r(x,.)\}=O(\|r\{x,.\}\|_V).$$

Это означает, что не выполнено определение (6.19).

Теорема 6.2. Если функция $f(.)$ имеет в точке x сильную производную $f^*(x)$, то выполнено условие дифференциала:

$$N_V\{f(.)-f(x)-f^*(x)r(x,.)\}=o(\|r\{x,.\}\|_V). \qquad (6.20)$$

Доказательство. По (6.19) $N_V\{f(.)-f(x)-Br(x,.)\}=o(\|r\{x,.\}\|_V)$. По теореме 6.1

$$N_V\{f(.)-f(x)-Br(x,.)\}=N_V\{f(.)-f(x)-f^*(x)r(x,.)\}=o(\|r\{x,.\}\|_V).$$

Из этих соотношений непосредственно следует (6.20).

Утверждение 6.4. В условиях утверждения 6.2 $f'(x)= =B(x,\bigcap I(x))$. Это непосредственно следует из определения 6.7 и (6.9).

Замечание 6.4. Формулы теоремы 6.1 для И-производных являются аналогом известной формулы обычного приближенного дифференцирования $\Delta f/\Delta x=f'+o(\Delta x)$. Аналог формулы дифференциала $\Delta F(x+\Delta x)=f'\Delta x+o(\Delta x)$ возникает в теореме 6.2. Утверждение 6.4 соответствует конечной разности на сетях.

Определение 6.10. *Направленной прямой* назовем, следуя работе автора (1996), пространство $Rc[1]=[R,I_+,r]$, где $R=(-\infty;\infty)$, $I_+=\{[x,[x-u;x]]_{I+} \mid x\in R,\ u>0\}$, $r(x,y)=x-y$.

Замечание 6.5. Направленная прямая возникает при исследованиях однонаправленных процессов (например, топология времяобразных линий в теории относительности при представлении группы Лоренца в конических пространствах (Коганов, 1999б)).

Утверждение 6.5. На направленной прямой в норме (6.12) сильная производная соответствует обычной односторонней производной слева:

$$f^*(x)=\lim_{z\to -0}\left\{\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\right\}.$$

(Доказывается непосредственно.)

Утверждение 6.6. Пусть для функции f на действительной прямой R задано однородное по $t \in R$ дифференциальное уравнение вида $Df=U$, где D – дифференциальный оператор, U – правая часть, не содержащая производных. И пусть имеется семейство решений этого уравнения вида $f(.|P,t_0)$, где t_0 – начальная точка на R, P – набор начальных данных, однозначно определяющих решение. Тогда решения этого уравнения на $Rc[1]$ задаются двусторонней последовательностью

$$Q=\{(P_i,t_i)\},\ t_i \in R,\ t_i<t_{i+1},\ i=...,-1,0,1,...$$

и имеют вид

$$f(t \mid Q)=f(t-t_i+t_0 \mid P_i,t_i)\} \text{ при } t_i<t \leq t_{i+1}.$$

Доказательство непосредственно следует из однородности уравнения и непрерывности построенной функции слева.

Например, решением уравнения $\frac{df}{dt}=0$ будут любые непрерывные слева ступенчатые функции.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

Вихман Э. Квантовая физика. Берклиевский курс физики. Т. 4. М.: Наука, 1977. 415 с.

Коганов А.В. Processes and Automorphisms on Inductor Spaces. Russian Journal Mathematic Physic. Vol. 4. № 3. 1996. P. 315–339.

Коганов А.В. Автоморфизмы конических индукторных пространств // Вопросы кибернетики (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование). М.: РАН, 1999а. С. 182–189.

Коганов А.В. Индукторные пространства, как средство моделирования // Вопросы кибернетики (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование). М.: РАН, 1999б. С. 119–181.

Коганов А.В. Локальные операторы и дифференцирование на индукторных пространствах // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 9. Ч. 2. М.: Ижевск: R&C-Dynamica, 2002. С. 373–384.

Либшер Д.Э. Теория относительности с циркулем и линейкой. М.: Мир, 1980. 149 с.

Математический энциклопедический словарь, статья «Идемпотент». М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 223.

Раздел V

МОДЕЛИ ВРЕМЕНИ В ТЕОРИИ СИСТЕМ