Метод расщепления истины и приложение к анализу произведений искусства.

А. В. Коганов
Москва, НИИСИ РАН, Нахимовский п-т 36 кор 2,
т.(095)-143-2370, 719-7869, e-mail: koganow@niisi.msk.ru

1. Эталонная структура математических теорий.

А рефлексивности у нас в искусстве нет:
Поэт в России больше чем поэт!
(Из блокнота автора.
Рефлексивность - математическая аксиома: $X = X$)

Одна из главных трудностей применения математики к искусству, как в плане анализа, так и в плане генерации произведений, это - несоответствие характера интерпретаций основных информационных объектов, образующих язык общения (текстов, рисунков, фонем и инструментальных звуков). Если в математике принята система обучения, обеспечивающая практически стандартную интерпретацию конструкций математического языка, то в искусстве однозначность понимания имеет место только в некоторых вопросах, относящихся к технике исполнения (создания) произведений. Интересно, что в вопросах техники построения математических теорий сегодня царит практически полный хаос: начиная с построения самых конструктивных программных объектов, и кончая выбором гипотез, подлежащих доказательству, и поиска этих доказательств, математик может полагаться только на свою интуицию и личный опыт. В этом вопросе математики могут позавидовать прекрасным учебникам музыки и живописи. Таким образом, система интерпретаций в искусстве и математике строится по строго дополнительным принципам. Математик должен интуитивно создать однозначно интерпретируемый объект (сегодня вместо термина "строгое утверждение" предпочитают говорить о "четких высказываниях", понимая, что некоторая формальная неоднозначность может сохраниться, например, за счет неоговоренности базовой логической системы: классика, конструктивизм, интуиционизм, теория типов и т. п.). Наоборот, художник должен четкими ремесленными методами создать объект, имеющий интригующую, увлекательную, таинственную, глубоко ассоциативную неоднозначность интерпретации. Автор надеется, что ему удалось это создать в предыдущей фразе. Не случайно, говоря о технике искусства часто употребляют слова "расчет", "построение", "состав", "изготовление"..., а, говоря о технике математика, нередко употребляют слова "искусство" или "волшебство". Зато, когда речь заходит о полученных результатах, терминология меняется местами. Вероятно, нет никаких надежд, что художники займутся математикой. Дело тут не только в ином образе мышления и восприятия мира, но и в несоответствии адресатов творчества. Художник обращается ко всем людям, а математик - к узкому кругу специалистов: такова плата за строгость (четкость) результатов. Однако математика, как универсальное средство интеллектуального моделирования, конечно, должна выработать аппарат, позволяющий исследовать искусство, как явление. В этой работе я умышленно не касаюсь математики, как инструмента искусства: законы музыкальной гармонии, зрительной перспективы, компьютерные виды искусств, строительные расчеты в архитектуре и многое другое давно заняло видное место в арсенале художников. Но это как раз та область, где искусство стремится к наибольшей определенности. Попробуем разобраться, что может дать математика в туманном мире неоднозначных трактовок произведений.

И прежде всего, хочется понять, как формируется четкость понимания математического текста. Поняв это, мы сможем выделить объект, порождающий неоднозначность ассоциаций, а это даст ключ к его "строгому" моделированию. Вероятно, следует ожидать, что сама эта модель будет неоднозначна. Видимо, может быть много трактовок "нечеткости мышления" и им будут соответствовать разные модели. Кроме того, такие модели могут даже в рамках одной концепции различаться подробностью учета реальных факторов. Это обычная цена, которую платит математик за обозримость теории. Надо сразу отметить, что неоднозначность понятий встречается не только в искусстве, но практически везде, где описание явлений ведется на разговорном не математическом языке.

Любая работа математика в приложении начинается с постановки задачи, и на этом этапе выясняется, что значат те слова, которыми пользуются специалисты базовой области приложения: инженеры, врачи, геологи и т. д. Нередко, вместо одного термина приходится вводить несколько, отражающих разные варианты смысла общего понятия. Самое удивительное, что эту работу проделывает математик, как-то выплывая из болота нечетких описаний. Это наводит на мысль, что имеется еще одна "предматематическая" логика, умеющая работать в условиях теоретических противоречий и выдающая в конце концов постановку задачи, пригодную для обычной, скажем, формальной логики. Характерно, что сами эти постановки вариативны, и далеко не всегда может быть выделена одна "истинная теория". Чаще возникает целый спектр возможных описаний, и выбор одного из них не объективно обусловлен. При анализе произведений искусства сохранение разных трактовок превращается в обязательное условие. Однако математическая теория должна явно сформулировать эти трактовки и мотивировать их возникновение. Чтобы построить модель предматематических рассуждений, надо выяснить природу однозначности интерпретаций в математике и границы этой однозначности. Разумеется, никакая теория не может иметь абсолютно однозначную интерпретацию. Например, на вопрос о цвете натуральных чисел математики дадут несхожие ответы. Большой разброс в цветовом ощущении у разных людей делает признак цвета непригодным для математических определений. А вот признаки простых форм (круг, квадрат, отрезок, треугольник ...) даются на уроках математики еще до начала курса геометрии, причем на этих уроках отстающих, обычно, нет. Широко распространенное мнение, что математическая строгость обусловлена логическим определением понятий, восходит еще к античности. Но оно противоречит простому здравому смыслу: конечное число слов нельзя определить друг через друга, не впадая в порочный круг. Реально, однозначность интерпретаций достигается путем предъявления ученикам на начальной фазе обучения эталонных объектов и эталонных действий с этими объектами. Сами эталонные объекты должны обладать признаками, которые воспринимаются одинаково почти всеми людьми. Точнее, восприятие этих признаков у разных людей должно быть адекватным. Люди с разным цветовым ощущением по-разному будут производить или интерпретировать раскраску предметов, что и делает цвет неудобным признаком для математического эталона. То же относится и к музыкальным тонам. Подходящие для эталона объекты крайне редки, и обнаружение каждого нового первичного эталона - большой успех целого ряда наук: психологии, дизайна, метрологии и др. Математика стала универсальной наукой, когда начала синтезировать из первичных эталонов более сложные путем логических определений. При этом объект изучения своеобразно кодируется своим определением, которое превращается в новый эталон, в чем-то аналогичный исходному объекту. Те свойства, для которых имеются эти аналогии, образуют математическую модель, а сами аналогии являются системой интерпретаций данной теории. Для моделирования других свойств объекта надо строить другую модель и другую теорию.

Математика, таким образом, дает способ синтеза моделей из исходных эталонных понятий. В этом качестве она и стала основой всех "точных" наук. Эталонные операции делятся на два класса: конструкции и вывод. Операции конструкции мало рассматриваются в современной математической литературе, хотя именно они позволяют вводить начальные объекты и аксиомы, связывающие свойства этих объектов. Традиционно, логика работает с уже введенными аксиомами и определениями. Математическая логика, как наука, изучает вывод новых свойств из аксиом и определений, используя эталонный набор правил вывода, задание которых также выходит за рамки логики. Но, как мы видели выше, именно операции конструкции и образуют "предматематический аппарат". Они порождают и саму логику, как способ построения (записи) доказательств (но не математическую интуицию, которая не менее загадочна, чем искусство).

На протяжении ряда лет автор "собирал" первичные эталоны, лежащие в основании математических теорий. Оказалось, что их удивительно мало, и к тому же часть из них в современной математике не используется после изменения языка теории. В силу их логической неопределимости для описания эталонов приходится пользоваться разговорным языком в надежде на достаточную ясность возникающих ассоциаций. Эти эталоны не выразимы друг через друга логически, и в описаниях возможны словесные зацикливания: эффективно ввести эти объекты можно только предъявлением образцов и примеров. Вот перечень того, что удалось найти.

1) Носитель информации (место записи теории и-или объекта).

Формируется предъявлением бумаги и записи на ней или других средств занесения и хранения символов. Эталонные свойства:

1.1) Носитель имеет места, где можно записывать любые символы;

1.2) Этих мест достаточно для данной теории;

1.3) Эти места адресуемы и упорядочены (обычно порядок линейный);

1.4) Сделанная запись неизменно сохраняется во времени, но может быть изменена волевым путем по мере развития теории.

***

2) Алфавит теории (набор различимых и узнаваемых символов).

Формируется предъявлением букв, цифр, иероглифов, особых значков. Эталонные свойства:

2.1) Алфавит состоит из набора значков, одинаково узнаваемых и различаемых всеми людьми;

2.2) Два значка либо всегда отождествляются, либо всегда различаются;

2.3) Каждый значок может тиражироваться на носителе в количестве достаточном для теории и в форме, отождествляемой с исходной.

***

3) Линейный порядок (последовательность элементов).

Этот объект интерпретируется как во времени, так и в пространстве. Его свойства похожи на аксиомы натурального ряда чисел, но с заменой аксиомы индукции на свойство неразрывности: к любому элементу порядка можно подойти от первого элемента за некоторое число переходов к последующему элементу. Формируется предъявлением пространственных рядов или временных последовательностей действий и событий. Вводит слова "раньше, позже, ближе, дальше, выше, ниже, больше, меньше" и т. п.

***

4) Совокупность элементов.

Формируется как эталон предъявлением конечных наборов предметов или бесконечных наборов точек в геометрических фигурах. Очень тесно связан с эталонами алфавита и линейного порядка.

***

5) Произвольный выбор из данного множества альтернатив.

Формируется выполнением ответных действий на просьбу "выбери один предмет из этого набора".

***

6) Шаг рассуждений (операция при расчетах).

Формируется демонстрацией вычислений или логических построений, как элементарный этап этих действий. В последнее время возникла интерпретация через шаг алгоритма или команду программы компьютера. Связан с интуитивным образом времени.

***

7) Подстановка / таблица / отображение.

Формируется демонстрацией замены части текста на другой текст или предмета на предмет по описанным в форме таблиц правилам. Тесно связан с носителем информации и алфавитом. Все вычисления, логические правила и операции вводятся через этот эталон.

***

8) Тиражирование математического объекта.

Формируется демонстрацией копий геометрических структур, графических схем, текстов описаний математических объектов, наглядных пособий и т. п. Эталонным является сохранение в копии всех математических свойств оригинала при различимости копии и оригинала. Кроме того, копия от копии и разные копии оригинала признаются математически равноценными и попарно различимыми.

***

9) Обязательное действие в описанной ситуации.

Предполагает обучение распознаванию ситуации по описанию и запрет на все действия, кроме предписанного. Кроме того, имеется эталонная активация действия или запрет на бездействие. Этот эталон включает в себя и понятие запрета. Обучение обычно ведется на играх (обязательные ходы) и использует более ранние элементы воспитания детей.

***

10) Заучивание текста, действия или образа человеком.

Этот эталон независим от остальных, хотя может показаться, что он - только частный случай записи на носитель. Фактически, в математике только заученная человеком информация может играть активную роль. Относится сюда и обучение эталонам.

***

11) Дополнительные эталоны.

Введенных эталонов 1-10 достаточно, чтобы построить современный математический язык. Однако имеются и другие эталоны, которые сегодня используются в интуитивном мышлении математика, причем для построений с помощью этих дополнительных эталонов существуют стандартные средства перевода на язык, их не использующий. Однако, как эталоны они независимы, и такая редукция связана с ограничением на использование их свойств при "современном уровне строгости" в математике. К таким дополнительным эталонам нужно отнести:

11.1) эталоны простейших геометрических форм (круг, квадрат, отрезок прямой, треугольник, угол, пересечение отрезков);

11.2) геометрические преобразования на плоскости типа сдвига, поворота, совмещения точек фигур при сдвиге, построения циркулем и линейкой;

11.3) отождествление интеграла функции с площадью под ее графиком, а дифференциала - с касательной к графику;

11.4) изображение связей стрелками на графе;

11.5) понятие поощрения и наказания при описании цели действия.

Имеется ряд других наглядных приемов, обычно не приводящих к серьезным ошибкам, но помогающих почувствовать математическую задачу.

***

12) Пример для общего понятия (частный случай).

Формируется демонстрацией конструктивных примеров объектов, свойства которых удовлетворяют всем требованиям логического определения класса объектов. Используются задачи на построение таких примеров для заданных определений и аксиом. Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от общего определения к частному объекту.

***

13) Обобщающее логическое определение для набора объектов.

Формируется обучением выделять общие признаки у разных конструктивных или реальных объектов. Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от набора объектов к общему определению. При этом свойства определяемого класса зависят только от определения, а не от исходных объектов. В частности, при изменении определения меняются примеры класса, но исходные объекты при правильном определении всегда являются примерами. Указанные неоднозначности означают, что эталоны примера и определения не являются взаимообратными операциями, но психологически они взаимодополнительны.

***

14) Введение эталона.

Вне всякого сомнения имеется еще не вполне осознанный Эталон Введения Эталонного Понятия. Ближе всего к его формированию подошли, видимо, метрологи. Но в математике он не использовался в явном виде со времен Евклида.

***

Последовательное построение современной математической логики из введенных эталонов слишком громоздко для данной статьи, и автор предполагает знакомство читателя с понятием правил вывода, поля вывода, операций и/или/не/следует и аксиоматики теории в логике. Существенным для дальнейшего будет тот факт, что на каждом шаге логического вывода в традиционных логиках выбор очередного правила вывода и его операндов осуществляется произвольно из всего наличного на этом шаге набора. При этом набор правил вывода остается неизменным, а меняется состав возможных операндов вывода в поле вывода. Далее будем называть потенциальные операнды вывода L-объектами, не конкретизируя их конструкцию: высказывания, предикаты, функции и т.п. - для наших целей это будет не существенно. Но каждая логическая система имеет критерий допустимости того или иного набора L-объектов в поле вывода. На уровне эталонных конструкций логика является метаавтоматом (объектом метаматематики, аналогичным формальному автомату в логике), меняющим свое состояние под воздействием входного воздействия и выдающим после этого выходное сообщение. Состоянием является набор L-объектов на носителе поля вывода, а входные воздействия отождествляются с применяемым на очередном шаге правилом вывода и его операндами. Новое состояние включает в себя полученный L-объект. Выходом метаавтомата будем считать значение критерия допустимости на текущем состоянии. Для построения математической модели некоторого реального объекта надо задать метаавтомату, соответствующему принятой логике, начальное состояние, состоящее из описаний моделируемых свойств в форме L-объектов (аксиом). Теория будет состоять из всех L-объектов (теорем), которые можно получить в поле вывода из этого состояния.

Общий взгляд на *нестрогое* описание модели состоит в том, что в процессе вывода на носителе будут возникать недопустимые с точки зрения принятой логики сочетания L-объектов. Задачу предматематики теперь можно сформулировать так: каким образом следует менять систему аксиом (начальное состояние метаавтомата) при обнаружении нестрогости модели. При этом желательно не потерять тех теорем, которые можно получить из прежних аксиом в допустимых состояниях. Уже в этой очень абстрактной формулировке видно, что при появлении нестрогости приходится отказываться от идеи произвольного выбора очередного правила вывода и выполнить какие-то обязательные "профилактические" действия. Кроме того следует ожидать неоднозначности возможных модификаций теории, что означает разветвление теории на несколько альтернативных вариантов. Эта *бифуркация теории* на шаге проявления нестрогости модели, соответствующая ветвлению функции истинности на возможных свойствах моделируемого объекта, и дала повод для названия "Метод расщепления истины". При моделировании природных явлений такое расщепление обычно отражает только степень нашей неосведомленности и предполагает в дальнейшем экспериментальное уточнение модели. Но при изучении произведений искусства именно в этом разветвлении интерпретаций и может заключаться главная информация.

К модификации теории можно сразу выделить два подхода: интуитивный и методический. Интуитивный подход содержит только один явно сформулированный шаг: при обнаружении в поле вывода нестрогости (недопустимого состояния метаавтомата) прекратить дальнейший логический вывод. Далее следует совершенно не эталонная рекомендация искать новые аксиомы, но для каждой предложенной аксиоматики требуется возобновить вывод в эталонной логике. Этот путь очевиден, но его нельзя считать моделью предматематического процесса в силу неопределенности способа поиска аксиом. В методическом подходе регистрация нестрогости теории приводит к изменению работы метаавтомата в рамках специальной эталонной конструкции. В результате формируется новая аксиоматика и система определений, возможно в нескольких вариантах, а также новые правила вывода, позволяющие в дальнейшем избегать той же самой нестрогости. При появлении новой нестрогости процесс повторяется. Такой метод будет эффективен, если удастся наращивать теорию, не теряя того, что получено до возникновения нестрогости. В этом случае мы уже имеем модель предматематики на эталонном уровне. Однако, следует понимать, что никакой метод не даст всего, что можно сделать творческим путем, и за эталонность действий придется платить упущенными вариантами теории. В то же время методический путь интересен тем, что для борьбы с нестрогостью используется сама логика, и поиск строгой модели объекта становится предметом изучения. В дальнейшем будет описан один из методов такой модификации теории.

2. Конструктивное устранение противоречий в теории.

Математика - это наука о том, о чем людям удалось договориться.
(замечание школьного учителя)

Согласие есть продукт при обоюдном непротивлении сторон!
(И. Ильф, Е. Петров, "12 стульев")

Предлагаемый метод пригоден для модификации любой из используемых в математике логик. Однако, учитывая, что целью статьи является не формальная общность результата, а содержательная ясность метода, выберем в качестве базы классическую формальную логику с двузначной истинностью: И - истина, Л - ложность. В качестве L-объектов будем рассматривать высказывания. В поле вывода будут помещаться высказывания с пометкой вычисленного для них значения функции истинности, которое будем называть рангом высказывания:

номер/ ВЫСКАЗЫВАНИЕ /истинность;

При таком подходе в поле вывода могут появляться и высказывания, ложные в данной теории, но с рангом ***/Л***. Исходные аксиомы имеют ранг ***/И***. Для проведения анализа с использованием предположений можно ввести дополнительно ранги условной (предполагаемой) истинности: ***/?И***, ***/?Л***. Естественно, все выводы, полученные с использованием высказываний, имеющих условную истинность, имеют условный ранг. Этот ранг используется, например, при доказательстве утверждения «методом от противного». Все объекты в поле вывода располагаются в порядке появления (номера идут подряд). Противоречие определим, как одновременное наличие в поле вывода пары объектов вида ***i/X/И***; ***j/X/Л***; или ***i/X/И***; ***j/не X/И***; где ***X*** - высказывание, а номера несущественны. Операции "и", "или", "не", "следует" определяются известными таблицами истинности и правилами вывода. При появлении в поле вывода противоречия будем регистрировать нестрогость теории.

Для обработки обнаруженной нестрогости нам потребуются дополнительные значения функции истинности: ***/ПИ*** , ***/ПЛ*** - предварительная истинность или ложность; ***/Д*** - доминирующая аксиома.

Смысл этих рангов будет разъяснен ниже. Начиная с шага обнаружения нестрогости в логике начинают работать особые операции, применение которых обязательно в оговоренных ниже случаях. Такие обязательные операции будем называть форсированными. Если противоречие имело указанный выше вид, то поле вывода форсированно удваивается с сохранением в каждом экземпляре всех утверждений полученных до противоречия. В один экземпляр форсированно вводится новая аксиома доминирующего ранга: ***Х/Д***; , а в другой экземпляр - аксиома того же ранга ***(не Х)/Д***; Также, как и исходные аксиомы, доминирующие рассматриваются, как истинные утверждения и в таблицах истинности ранг ***Д*** заменяется на **И**. Но теперь на каждом поле вывода строится своя теория и в ней действует форсированное правило: если утверждение противоречит доминирующей аксиоме, оно устраняется из теории. Вначале форсированно осуществляется изъятие из поля вывода всех ранее возникших в нем противоречий с доминирующей аксиомой (возможно и удаление некоторых исходных аксиом). Для этого ранги всех утверждений в поле вывода заменяются на предварительные и, если утверждение сохраняется в теории, ему возвращают его основной ранг. Затем на каждом шаге вывода новое утверждение получает предварительный ранг и форсированно проверяется на противоречие с доминирующими аксиомами данной теории и если оно есть, то это утверждение удаляется. Если противоречия нет, то предварительный ранг заменяется на соответствующий основной. Таким образом, повторно это противоречие в каждой из новых теорий возникнуть не может. В то же время мы сохраняем альтернативные возможности построения теории но на разных полях вывода. При возникновении в такой теории нового противоречия произойдет форсированно новое раздвоение теории и появятся новые доминирующие аксиомы. Таким образом, при нестрогой исходной аксиоматике возникает дерево альтернативных теорий, отличающихся составом доминирующих аксиом. Это соответствует многолистной функции истинности, при отслеживании на каждой ветви теории одного ее листа. В зависимости от исходной аксиоматики ветвление теорий может быть конечным или бесконечным.

Выше был рассмотрен самый простой случай текстуального противоречия L-объектов. Однако, в разрешимых логиках можно усилить конструкцию, проверяя новые объекты на неэквивалентность отрицанию доминирующих аксиом. Разумеется, это потребует больших вычислений. В неразрешимых логиках или теориях такой подход требует специальной организации расчетов на определение эквивалентности L-объектов, так, чтобы не допустить бесконечно долгого шага вывода. Это может привести к установке предварительного значения истинности у какого-то объекта на неопределенно большое число шагов вывода. В этом случае любой вывод с использованием этого объекта дает предварительный результат, который нельзя перевести в основной ранг до разрешения исходного объекта. Для этого нужно предусмотреть в поле вывода систему ссылок между зависимыми L-объектами. Возможно, проще запретить вывод с предварительным рангом (кроме расчетов по установлению эквивалентности).

3. Непротиворечивость метода расщепления истины.

" Я всегда говорил, что меня зовут Эрнст!"
(О. Уайльд, "Как важно быть серьезным")

Рассмотрим вопрос о том, не возникают ли при использовании описанного метода новые первичные противоречия, кроме заложенных в исходные аксиомы. После построения разветвленной теории типов внутренняя непротиворечивость теории сводится к непротиворечивости арифметики путем построения теоретико-множественной модели этой теории. Модель формальной логики строится таким образом, чтобы каждому высказыванию в поле вывода соответствовало подмножество-интерпретация в пространстве элементарных интерпретаций. При этом конъюнкции высказываний соответствует пересечение интерпретаций, дизъюнкции - их объединение, отрицанию - дополнение до всего пространства, а следованию - вложение интерпретации причины в интерпретацию следствия. Каноническая модель логики для высказываний, записанных в заданной грамматике, представляет собой формальное пространство всех правильно построенных высказываний и в качестве интерпретации высказывания берется множество всех высказываний, из которых оно формально следует, а его отрицание не следует. Известно, что если высказывание влечет хотя бы одно противоречие, то оно влечет и все противоречия. Это доказывается формальной выкладкой, не зависящей от грамматики конкретной теории. Значит, такие высказывания не войдут ни в одну из интерпретаций высказываний, и их собственные интерпретации будут пусты. Отбросим их из пространства интерпретаций. Тогда для высказывания, имеющего непустую интерпретацию, дополнительное множество интерпретирует его отрицание. Остальные свойства выполняются тавтологично. Из аксиом следует теория, состоящая из всех высказываний, в интерпретации которых содержится пересечение интерпретаций всех аксиом. Если аксиомы непротиворечивы (и только тогда), то теория содержит не все высказывания. Противоречие в аксиомах означает, что пересечение их интерпретаций пусто, и тогда в этой теории все высказывания истинны (поскольку каждое множество имеет пустое подмножество - это модельная интерпретация известного факта из логики).

Рассмотрим, что происходит с интерпретациями при расщеплении истины. Если аксиомы непротиворечивы, то ситуация совпадает с описанной выше. Если же возникло расщепление теории доминирующими аксиомами ***Х/Д;*** и ***(не Х)/Д;*** , то каждая из них в своей теории исключает другую из множества допустимых интерпретаций. Поэтому получить высказывание с пустой интерпретацией ***(Х и не Х)/И*** оказывается невозможно. Устраняются также те высказывания, которые распознаются выбранным критерием допустимости, как влекущие отрицание доминирующей аксиомы. При этом могут сохраниться некоторые такие высказывания вплоть до получения следующего противоречия и нового расщепления аксиоматики. Каждое из противоречий получается в результате вывода на основе правил исходной (базовой) логики из исходных и доминирующих аксиом. Но каждая доминирующая аксиома была получена выбором одного из двух высказываний, полученных тем же способом. Таким образом любое высказывание в поле вывода каждой из построенных теорий могло быть получено из исходных аксиом по базовым правилам вывода без прохода через противоречие. В частности, это означает, что не возникло новых возможных интерпретаций и новых противоречий, по отношению к выводу в базовой логике.

В теориях, полученных методом расщепления истины, не может содержаться противоречий ни на каком завершенном шаге вывода, поскольку каждое из возникающих противоречий форсировано подавляется (после получения) соответствующим расщеплением теории и больше не возникает.

4. Специфика анализа произведений искусства.

Ты говорил, что ты желанного добьешься,
Считай, хоть вряд ли так,
что все в твоих руках.
(Омар Хайям)

При работе с художественным произведением самым неясным местом оказывается хоть какая-нибудь исходная аксиоматика. По сути дела, прежде, чем начать анализ, надо описать это произведение в форме математической модели, а уже потом строить теорию и искать противоречия. Совершенно ясно, что результат анализа будет очень сильно зависеть от исходного моделирования. Однако, возможность не заботиться об исходной непротиворечивости такой модели вселяет некоторую надежду на получение интересного результата. Другой проблемой является размер необходимой аксиоматики. Описание произведения искусства можно сделать только с использованием разговорного языка, но тогда аксиоматика должна охватывать все его ассоциации. Здесь, видимо, надо воспользоваться тем фактом, что эти ассоциации уже заложены в исследователя, и нет необходимости явно выписывать их все сразу: надо только явно указывать необходимые ассоциации по мере их использования в выкладке, чтобы читатель мог проследить ход рассуждений и убедиться в допустимости ваших предпосылок. Такой метод, разумеется, будет порождать множество противоречий, но их мы, как раз, умеем обрабатывать. Субъективность полученного при этом вывода (в расщепленной истине) не является новым фактором для математики: всегда есть зависимость не только от аксиом теории, но и от выбранного пути ее развития. Построенные так работы будут выглядеть необычно, но их будет отличать от традиционного искусствоведения ясность аргументации и альтернативность всех оценок с указанием факторов, вызвавших каждую из них. В какой-то мере это может служить аналогом (или заменой) объективного анализа.

Для примера, попробуем провести небольшой анализ супрематического "Черного квадрата" К. Малевича. Из названия можно вывести, что изображен квадрат и цвет его черный. Из рассмотрения картины получаем явное отклонение от формы квадрата (перекос) и неровную окраску фигуры оттенками темно-коричневого цвета. Известно, что художник изобразил и квадраты других цветов: красный, зеленый, синий. Первое расщепление истины:

1а) Квадрат задуман, как черный/Д;
1б) Квадрат задуман с неравномерной окраской/Д;

Второе расщепление истины:

2а) Фигура задумана, как квадрат/Д;

2б) Отклонения в форме умышленные/Д;

Уже на этой стадии получаем четыре варианта теории, каждый из которых имеет право на существование. Например, в теории (1а,2а) из понятных ассоциаций можно вывести предположение о создании картины в некоторой спешке или о плохих условиях творчества (тоже расщепление истины!). А в теории (1а,2б) возникает гипотеза о плохом хранении картины, что привело к нарушению слоя и оттенка краски. В теории (1б,2б) возникает много вариантов гипотез о замысле и целях художника. И они породят новые расщепления истины. Привлечение ассоциаций с политической обстановкой эпохи создания картины даст толчок дополнительным ветвлениям анализа, проведенного в п.6.

5. Работа с неопределенной аксиоматикой.

Идя на врагов, не спрашивай сколько их, а спрашивай где они!
/А. В. Суворов ,"Наука побеждать"/

5.1. Логика с генерацией аксиом.

Из приведенного рассмотрения видно, что логический анализ при неограниченно большом количестве возможных исходных посылок требует необычной операции генерации очередной аксиомы. Вообще говоря, внешние (внелогические) источники информации могут быть нескольких типов, и введенная аксиома должна нести признак типа источника. Этот признак будем называть статусом аксиомы. Статус определяет возможные действия с аксиомой после ее введения в поле вывода теории. Например, если аксиома является хорошо проверенным экспериментальным, наблюдательным или историческим фактом, то она должна вводится в корневую теорию и учитываться во всех порожденных теориях. Она имеет исключительный статус, т. е. подавляет действие противоречащих ей аксиом менее достоверного статуса. В частности, появление такой аксиомы может привести к исчезновению некоторых разветвлений теории, возникших из расщепления истины. Расщепление истины на такой аксиоме возможно только при появлении противоречия с аксиомой того же статуса или с утверждением, вытекающим из набора таких аксиом. Самый слабый статус имеют спекулятивные ассоциативные предположения, субъективно введенные теоретиком, проводящим анализ. Имеются источники аксиом промежуточной достоверности.

Для построения формальной схемы логического вывода будем считать, что статус аксиом задается целыми числами по шкале ***0,1,...,N***, где наибольшей достоверности соответствует ***0***, а наименьшей **- *N*.**

При выводе из аксиом утверждения-теоремы статус последнего определяется по наименее достоверной использованной исходной аксиоме. При возникновении в поле вывода противоречия на утверждениях разного статуса, из теории форсировано удаляется менее достоверное из них. При равном статусе противоречащих утверждений происходит расщепление истины с альтернативными аксиомами того же статуса.

5.2. Правило уточнения аксиоматики.

Описанные выше правила достаточны для проведения вывода с генерацией аксиом на этапах, которые выбирает теоретик. Однако, при возникновении противоречий возможно удаление аксиом из поля вывода теории. Поскольку предполагается, что аксиомы вводятся обосновано, удаление их из теории требует мотивировки. Формально это означает, что необходимо ввести в теорию новые аксиомы, не менее достоверные, чем удаленная, но совместимые с утверждениями в поле вывода, и порождающие удаленную аксиому, как теорему, верную при дополнительных ограничениях. Иными словами, новые аксиомы должны ограничить действие удаленной аксиомы, но сохранить ее там, где она обоснована. Так проведенное удаление аксиомы будем называть уточнением аксиоматики.

Это новое требование к расщеплению истины. Оно порождает этапы обязательного поиска новых аксиом, не зависимо от воли теоретика. Моделью такого способа рассуждений может служить уточнение физических теорий при возникновении новых экспериментальных данных. Необходимо не только объяснить новые факты, но и показать где граница применимости прежних представлений. Это известный "Принцип соответствия" в науке. На удаление утверждений, не являющихся аксиомами, правило уточнения не распространяется, т. к. предполагается возможность логических противоречий и расщепления истины.

Интересным и важным частным случаем уточнения аксиоматики является логическая модель вопроса "почему(?)". Этот вопрос соответствует наличию двух аксиом: менее достоверная утверждает равноправие всех объектов некоторого типа, а более достоверная утверждает наличие некоторых выделенных (в определенном смысле) объектов этого типа. Поиск ответа означает уточнение аксиомы равноправия путем наложения ограничений, которым не удовлетворяют выделенные объекты.

6. Пример ветвящегося формального анализа.

Где начало того конца, которым оканчивается начало?
/ Козьма Прутков /

В этом подразделе будет построен пример анализа в логике с расщеплением истины и генерацией аксиом картины К. Малевича "Черный квадрат". Содержательный смысл его описан в начале раздела 4. Поскольку утверждения будут делаться на разговорном языке, то следование вывода из посылки надо понимать семантически, как в формальной, а не математической логике. Для увеличения формализма пришлось бы вводить много вспомогательных аксиом типа толкового словаря, доводя определение всех слов до эталонного уровня. Видимо, для анализа произведений искусства это нецелесообразно, так как большая часть текста приобретает чисто лингвистический характер, не относящийся к делу. Поскольку реально поле вывода будет одно, то все ветви теории будут располагаться на нем, и потребуются специальные указания, в какой из них проводится вывод.

6.1. Обозначения основных операций.

% xxx - семантический комментарий вне формального вывода.

(xxx) - идентификатор высказывания в поле вывода. При первом появлении высказывания он стоит слева в строке:

xxx) ОПЕРАТОР высказывание;/ статус .

T:(xxx) - вход в теорию, xxx -идентификаторы аксиом. Предполагается выход из предыдущей теории. После такого указания работа идет в поле вывода этой теории.

D:(xxx){yyy; zzz;} - противоречие и расщепление истины; xxx -идентификаторы входов в новые теории. Под этим оператором явно вводятся аксиомы расщепления yyy, zzz.

A:(zzzz/s) - генерация новой аксиомы; zzzz -текст аксиомы; s -статус =0,1,2,3.

I:(xxx) - уточнение аксиоматики; xxx - идентификаторы новых аксиом.

!(xxx) - удалить из теории высказывание с идентификатором xxx.

; - переход к следующему шагу вывода.

Если (xxx) и (yyy) высказывания или их идентификаторы, то:

(xxx) & (yyy) - конъюнкция.

(xxx) | (yyy) - дизъюнкция.

~(xxx) - отрицание.

(xxx) -> (yyy) - семантическое следование.

Для форсированных операций вводим префикс *ОПЕРАЦИЯ. Если его нет, то операция выбиралась произвольно.

6.2. Формальный анализ.

В таблице 1 показано поле вывода с расщеплением истины и генеграцией аксиом для логического анализа супрематической картины Казимира Малевича "Черный квадрат". Необходимые комментарии включены в таблицу непосредственно после поясняемых шагов вывода. Поля вывода разных теорий отделены разделительными линиями перед шагом входа в новую теорию. Нумерация шагов составная, что обеспечивает независимость нумерации в поле вывода каждой теории и смысловую группировку операций внутри теории. Крупные комментарии выделены в отдельные шаги для удобства ссылок на них.

Таблица 1. Поле вывода логического анализа картины К. Малевича "Черный квадрат".

1) A:(Название картины "Черный квадрат"/0);
2) A:(Изображен неправильный четырехугольник,
близкий к квадрату./0);
3) A:(Цвет изображения зеленовато-коричневый/1);

4) (1)& ((2)|(3)) -> Название противоречит изображению;/1
5) A:(Название картины соответствует ее содержанию/1);
6) (4)&(5) -> *D:(7, 8){
6.1) A:(Название противоречит изображению/2);
6.2) A:(Название не противоречит изображению/2);}
==============================
7) T:(1,2,3, 6.2); !(4);
7.1) I:(Цвет красок меняется за достаточно большой срок/0);
7.2) (7.1)&(1)&(3) -> прошло много времени и цвет изменился/1;
7.3) (6.2)&(1)&(2) -> *I:(Художник допускает некоторые отклонения
от эталона, как несущественные/2);
7.4) (7.3)&(6.2)&(1)&(2) -> (отклонение на картине от квадрата
несущественно/2);
7.5) (7.3)&(6.2)&(1)&(3) -> (отклонение цвета на картине
от черного несущественно/2);
7.6) (7.2)&(7.5) -> *D:(7.7, 7.8){
7.6.1) A:(Цвет изменен существенно/2);
7.6.2) A:(Цвет изменен несущественно/2);}
==============================
7.7) T:(1,2,3, 6.2, 7.6.1) -> *!(7.5);
% Изменение цвета не умышленное.
==============================
7.8) T:(1,2,3, 6.2, 7.6.2) -> *!(7.2);
% Отклонение цвета сознательное.
==============================
8) T:(1,2,3, 6.1) -> *!(5) -> *I:(8.1);
8.1) A:(всегда имеется контекст восприятия художника, в котором название соответствует интерпретации произведения/1);
8.2) % Исторический контекст при создании картины (1914-1915г):
8.2.1) A:(В России война и нарастает разруха/0);
8.2.2) A:(В России назревают социальные перемены, рушатся приоритеты ценностей/0);
8.2.3) A:(Технический прогресс порождает новые виды искусства/0);
% Кино, фотография, электромузыка, звукозапись.
8.2.4) A:(В России спонтанные погромы, военная диктатура/0);
% Расширяется черносотенное движение.
8.2.5) A:(Идет жестокая мировая война в Европе, зарождается фашизм/0);
8.2.6) A:(Гонка вооружений, усиливается мировой экономический кризис/0);
8.3) % Психологический контекст:
8.3.1) A:(Художник в произведениях отражает среду/1);
8.3.2) A:(Человек страшится столкновений с диктатурой/1);
8.3.3) A:(Новые идеи и возможности увлекают многих современников/1);
8.3.4) A:(К. Малевич заявлял о поиске выразительных средств вне словесного содержания/0);
% " В "Черном квадрате" мне удалось преобразить в нуль форму."
8.3.5) A:(Противоречие в информации активирует эмоции человека /2);
8.4) (8.2.5)&(8.2.6) -> фашизм имеет почву для распространения по всей Европе /0;
8.5) (8.1)&(3)&(8.4)&(8.2.1)&(8.3.1) -> Художник в "Черном квадрате" выразил предчувствие победы диктатуры фашистского типа /1;
8.6) (8.5)&(8.2.2)&(8.2.3)&(8.3.2)&(8.3.4) -> Форма и цвет картины предназначены для подсознательного воздействия на зрителя с целью вызвать предчувствие беды /1;
8.7) (8.6)&(4)&(8.1)&(8.3.5) -> Несоответствие формы и изображения введено для усиления чувства настороженности и неправильности происходящего /2;
8.8) (8.2.4)&(8.3.2)&(8.6)&(8.7)&(8.3.4) -> Малевич избегал явных заявлений о своем отношении к диктатуре любого типа /2;
==
9) T:(6.2, 8.1) -> !(2); *!(3); -> *I:(9.2);
9.1) % Аксиомы (8.2),(8.3.4) остаются в силу своего статуса.
9.2) % Искусствоведческий контекст:
9.2.1) A:(К. Малевич написал серию простейших монохроматических геометрических форм /0);

% Примитивы форм: квадрат, круг, треугольник.
Примитивы цвета: черный, красный, синий, зеленый, желтый.
9.2.2) A:(К. Малевич использовал примитивы в супрематических композициях /0);
9.2.3) A:(Новое направление в искусстве требует предварительных опытов /1);
9.3) (9.2.1)&(8.2.2)&(9.2.3) -> Серия примитивов была супрематическим экспериментом /1 ;
9.4) (9.3)&(8.3.4)&(9.2.3) -> Цель эксперимента - определить характер воздействия примитивов на зрителя /1 ;
10) % Противоречие выводов (8.6, 8.7) и (9.3, 9.4) означает, что (8) и (9) -теории на разных ветвях расщепления истины. Это расщепление произошло без явного противоречия, а в результате двух актов уточнения аксиоматики. Суть противоречия в том, что (9) предполагает обучение новому художественному приему, а (8) предполагает, что этот прием уже используется для решения серьезных художественных задач. Если (9.2) ввести в теорию (8), это противоречие возникнет явно и теории снова расщепятся уже по правилам вывода.
==
11) T:(6.2, 8.2, 8.3.4, 9.2) -> *!(3) -> *I(11.1);
11.1) A:(Все примитивы были равноправны социально и эстетически /2);
11.2) A:(Популярность и социальное звучание черного и красного квадратов намного выше, чем других примитивов /0);
11.3) (11.1)&(11.2) -> *!(11.1) -> *I(14.1);
==
12) T:(11, 11.1) -> !(11.2) -> *I(12.1);
12.1) % Контекст популярности:
12.1.1) A:(Популярность положительно зависит от рекламы /2);
12.1.2) A:(Черный и красный квадраты были первыми включены в каталоги и учебники по живописи /0);
12.1.3) A:(Популярные картины чаще выставляются и упоминаются в каталогах /1);
12.2) (12.1.1)&(12.1.2) -> Черный и красный квадраты популярнее других примитивов серии /2 ;
12.3) (12.2)&(12.1.3) -> Черный и красный квадраты имеют лучшую рекламу, чем другие примитивы серии /2;
12.4) (12.3)&(12.1.1) -> Популярность черного и красного квадратов устойчива /2;
13) % Получен ответ на вопрос "почему ...?": вместо аксиомы (11.2) возникает объяснение неравномерной популярности примитивов случайностью включения в каталог. Однако достоверность такого объяснения не велика из-за слабого статуса аксиомы (12.1.1).
==
14) T:(11, 11.2) -> !(11.1) -> *I(14.1);
14.1 % уточнение аксиомы (11.1):
14.1.1) A:(Чем больше картина вызывает значимых ассоциаций, тем выше ее популярность /2);
14.1.2) (9.2.1) -> По форме примитивы равно ассоциативны /0;
14.1.3) (14.1.1)&(14.1.2) -> Примитивы равноценны на классе формальных геометрических ассоциаций/2;
14.2) % Ассоциативный контекст:
14.2.1) A:(Черный квадрат дает прямые значимые ассоциации: черный флаг, грунтовка холста, ночь, темная комната /1);
14.2.2) A:(Красный квадрат дает прямые значимые ассоциации: красное знамя, революция, театральный занавес, печь, пожар в доме /1);
14.3) (14.2.1)&(14.2.2)&(8.2) -> Черный и красный квадраты дали прямые ассоциации с политикой и идеологией начала века /1;
14.4) (14.3)&(14.1.1) -> Повышенная популярность черного и красного квадратов среди примитивов /2;
15) % Результат (14.3) повторяет аксиому (11.2), но она остается независимой, поскольку имеет более сильный статус. Мы получили объяснение, но не доказательство, этого эмпирического факта, поскольку некоторые посылки объяснения менее достоверны чем он. Теория (14) использует социальный контекст (8.2), но она несовместима с теорией (8), где предполагалось умышленное изображение политической ситуации в "черном квадрате", а (14) заимствует аксиомы (9.2) о создании формальной серии примитивов. Устранение (11.2) из (14) не изменит теоремы этой теории, но ослабит статус некоторых теорем.
===================================

7. Заключительные замечания.

Скоро кончатся твои муки.

Твое сознание проясниться.
/ Д. Хармс, "Окно" /

Проведенный выше частичный анализ абстрактной картины показывает новые возможности и необычные свойства ветвящихся логических теорий. Возможность динамического подключения новых аксиом, учета их достоверности и конструктивной работы с возникающими противоречиями расширяет поле логического анализа на область нечетких постановок задач и постепенного поступления информации.

Комментарии шагов (10)(13)(15) пп 6.2 и шаги уточнения аксиом, такие, как (14.1), показывают существенно новые свойства логики с расщеплением истины. Однако эти свойства хорошо знакомы нам по неформальному мышлению, и, фактически, моделируют естественные ситуации на стадии изучения нового объекта.

Неоднозначность получаемых выводов компенсируется их группировкой по разным теориям с явно выписанной аксиоматикой. Потребность в таких методах возникает в любой области математического моделирования. В методе расщепления истины от нас не требуется выбирать одну из точек зрения, но мы их можем эффективно генерировать.

Возникает своеобразная игра, в которой математик создает свое произведение искусства в логической модальности восприятия. И это, возможно, самое главное, чего удается достигнуть на пути ветвящихся теорий.

Литература.

1. А.В.Коганов. Метод расщепления истины в парадоксной защите логики. XI международная конференция "Логика, методология, философия науки", т.2, с37.

2. А.В.Коганов. Модель расщепления истины в искусстве. Международная конф. "Математика и искусство", Суздаль, 1996г.,с34.

3. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. "Наука", М.,1986, 367с.

4. Я. А. Силин. Современная модальная логика. ЛГУ, Ленинград, 1976, 104с.

5. Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. Сб., "Наука", М., 1976г.,328с.