ГЛАВА XIII

Александр П. Левич
Кафедра общей экологии Биологического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова;
кафедра моделирования природных референтов времени
Web-Института исследований природы времени
http://www.chronos.msu.ru; apl@chronos.msu.ru

Поиск законов изменчивости систем как задача темпорологии*

Л. Эйлер полагал, что путем общих «метафизических» рассуждений можно найти ту величину, которую «экономит» природа и полученный экстремальный принцип в скрытом виде уже будет содержать все нужные законы природы, найти которые в явной форме – дело простой математической ловкости. Г. Лейбниц считал, что экстремальные принципы справедливы потому, что «мы живем в лучшем из миров». Чем же так хорош окружающий нас мир? В современном знании возникли предпосылки для возврата к программе Эйлера.

Деятельность теоретика-модельера по описанию естественных и антропных систем базируется на подборе подходящих математических структур. Для оперирования классами структурированных множеств предназначена математическая теория категорий и функторов. Система может быть формально описана категорией, содержащей класс объектов – состояний системы и класс морфизмов – допустимых структурой системы способов преобразований одних состояний в другие. Состояния систем, описываемых математическими структурами, могут быть упорядочены методами теории категорий по «степени их структурированности». Постулировано, что динамика системы определяется принципом максимальной структуры: из заданного состояния система переходит в то состояние, структура которого максимальна (в пределах доступных системе ресурсов).

Предложен строгий метод, позволяющий каждому состоянию системы сопоставить числовую функцию, значения которой изменяются монотонно по отношению к степени структурированности состояния и могут служить ее мерой. Значение этой функции рассчитывают через количество допустимых системой неэквивалентных преобразований. Эта функция обобщает понятие «количество элементов», определенное для бесструктурных множеств, на множества со структурой. Эта функция может быть интерпретирована как обобщение статистической энтропии и может быть названа обобщенной (структурной, функторной, теоретико-

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-06-00073а).

категорной) энтропией. Структурная энтропия получена вне каких-либо статистических или вероятностных предпосылок.

Принцип максимальной структуры должен быть переформулирован как принцип максимума (обобщенной) энтропии. От Второго начала термодинамики его отличают применение к открытым (в самом общем смысле) системам и обязательное требование ограничений по ресурсам.

Введены и сопоставлены представления о собственных временах систем: время категорное, время системное, время структурное, время энтропийное и время метаболическое. Категорное и системное времена описывают качественные аспекты изменчивости систем. Структурное, энтропийное и метаболическое времена предоставляют способы количественного измерения изменчивости, т. е. вводят различные типы часов для измерения собственного времени систем. Экстремальный принцип может быть переформулирован как принцип минимального метаболического времени.

Теоретико-категорное описание систем включает необходимые компоненты динамических теорий: элементарные объекты, пространство состояний, способы изменчивости и способы ее измерения.

Полученные результаты позволяют предложить для отыскания законов изменчивости систем формализм, обобщающий формализм Джейнса.

Ключевые слова: *экстремальные принципы, энтропия, время, уравнения движения, теория категорий и функторов, формализм Джейнса.*

1. Уравнения движения или экстремальный принцип?

Главный для меня мотив изучения времени – надежда обнаружить пути вывода, а не угадывания законов изменчивости систем или, другими словами, – вывода фундаментальных уравнений их движения (движения – в самом общем смысле). В статье «Почему скромны успехи...» из методологического раздела этой книги предъявлены необходимые компоненты любой динамической теории, обязательно предшествующие этапу формулировки закона изменчивости. Среди этих компонентов – набора элементарных объектов, пространства состояний, способов изменчивости и методов ее измерения – наименее разработаны в нынешнем теоретическом знании последние два, непосредственно относящиеся к предмету темпорологии.

Существует не так уж много вариантов формального представления фундаментальных законов в теоретическом естествознании (см. раздел о компонентах динамических

теорий в статье «Почему скромны успехи...» в методологической главе этой книги). Самый распространенный из них – так называемые, уравнения движения. Например, уравнения Ньютона в классической механике, уравнение Шредингера в нерелятивистской квантовой механике, уравнение Дирака для релятивистского случая, уравнения Эйнштейна в общей теории относительности... Уравнение движения – это постулат, изобретенный гением, имя которого становится именем фундаментального закона.

Другой распространенный вариант – формулирование экстремального принципа. Например, в физике известны принцип наименьшего времени распространения света П. Ферма, принцип наименьшего действия П. Мепертюи, принцип максимальной энтропии, принцип минимума производства энтропии... В биологии известны принцип наибольшей приспособленности Ч. Дарвина, принцип максимальной экспансии, более дюжины экстремальных экологических принципов[1] и т. п. Угадывание постулата-уравнения заменяет в теориях, основанных на экстремальных принципах, угадывание (т. е. то же постулирование) функции или функционала, поиск экстремума которых методами вариационного исчисления приводит к описанию движения или развития исследуемой системы. Теории, построенные с помощью постулатов-уравнений или постулатов-функционалов, как правило, эквивалентны друг другу, а именно, вариационные методы позволяют для любого заданного функционала выписать уравнения движения в форме уравнений Эйлера–Лагранжа, а для любого уравнения движения можно подобрать функционал, для которого оно является уравнением Эйлера–Лагранжа.

Однако экстремальные принципы, на мой взгляд, обладают большей обобщающей и эвристической силой. Рассмотрим пример камня, брошенного под углом к горизонту. Почему он движется по параболе? Объясняя явление, можно указать на квадратичное уравнение равнопеременного движения. Само это уравнение представляет следствие второго закона Ньютона для тела, движущегося под действием постоянной силы. Возможно и более общее объяснение – через движение по геодезической линии, которая является решением уравнения Эйнштейна в общей теории относительности. И уравнение Ньютона, и уравнение

Эйнштейна могут быть получены из принципа наименьшего действия. Однако уравнение равнопеременного движения относится к узкому классу движений под действием постоянной силы, второй закон Ньютона описывает движения под действием произвольных сил в слабых полях и с невысокими скоростями, уравнения Эйнштейна уже не связаны и этими ограничениями, а принцип наименьшего действия применим ко всем формам механического, электромагнитного и ряда других движений.

Мысль о том, что «природа действует простейшим образом», чрезвычайно стара и послужила источником многих научных идей и методических приемов. Всем экстремальным принципам присущи две основные черты: крайний лаконизм и простота и в то же время крайне общий и универсальный характер (Голицын, Левич, 2004). В XIX веке установилась позитивистская точка зрения, согласно которой экстремальные принципы – суть только изящная и компактная упаковка для большого числа опытных фактов, не вносящая ничего нового в уже известные законы. Научная революция XX века, вызванная в физике теорией относительности и квантовой механикой, привела к пересмотру роли и места экстремальных принципов. Требования релятивистской инвариантности удается удовлетворить наиболее последовательным образом, только исходя из вариационных формулировок законов природы. Сложилось убеждение, что основные законы физики (а весьма вероятно, что и любой другой науки) должны иметь форму экстремальных принципов (Полак, 1960).

Открытие экстремальных принципов в свое время породило надежду подойти к законам природы не только «снизу», путем индукции, обобщения фактов, но и «сверху», путем дедукции от экстремальных принципов. Л. Эйлер, в частности, считал, что для этого нужно только путем общих «метафизических» рассуждений найти ту величину, которую «экономит» природа в данной области знания (т. е. «целевую функцию», «функционал»), и сформулировать соответствующий экстремальный принцип. В скрытом виде этот принцип содержит все нужные законы, и получить их в явной форме – дело простой математической ловкости. Несмотря на соблазнительную простоту этой программы, реализовать ее ни разу не удалось – ни самому Эйлеру, ни тем, кто пытался следовать за ним. Причина этого достаточно очевидна: не существовало никакого регулярного метода для отыскания экстремизируемой величины. Механике и оптике в этом смысле «повезло»: соответствующие величины были для них достаточно простыми и, в сущности, могли быть найдены путем перебора. Но уже в термодинамике максимизируемая величина – энтропия – не обладала ни простотой, ни достаточно очевидным физическим смыслом. После ряда неудач программа Эйлера по отысканию законов природы «сверху» была заброшена. Более того, сами вариационные принципы были взяты под подозрение и «урезаны в правах» вследствие своего рода «телефобии», которой была заражена позитивистски настроенная наука.

Позднее незаметно и, как это часто бывает, без лишней рефлексии наука вновь полностью вернулась к идеям экстремальности. Широкое распространение (Gzyl, 1995) в науках естественного и гуманитарного циклов получил принцип максимума энтропии. С его помощью решают задачи в статистической физике, экологии, математике, лингвистике, кибернетике, экономике, психологии, теориях коммуникаций, надежности, распознавания образов и т. д. Основная проблема в применении этого принципа состоит в отсутствии явных процедур для сопоставления каждой из исследуемых систем адекватного ее природе энтропийного функционала. Даже в прародительнице энтропии – статистической физике – подходы к расчету энтропии в интересующих исследователя случаях крайне ограничены (как сетовал И. Пригожин (1985, с. 93), «формулировка второго начала с точки зрения современного физика представляет собой скорее программу, чем утверждение, допускающее однозначную интерпретацию, так как ни Томпсон, ни Клаузиус не указали точный рецепт, позволяющий выразить изменение энтропии через наблюдаемые величины»). Поэтому обычная практика при работе с принципом максимума энтропии состоит в постулировании для исследуемой системы какого-либо аналога формул Больцмана или Шеннона. Наиболее последовательно указанная тенденция проявляет себя в так называемом формализме Джейнса. Метод исследования систем Эдвина Томсона Джейнса состоит из нескольких рекомендаций (Jaynes, 1957):

1. Сопоставить допустимым состояниям системы определенные значения вероятности их реализации.

2. Сформулировать в виде равенств ограничения на макропараметры системы (например, законы сохранения энергии, числа частиц и т. д.).

3. Отыскать равновесное состояние системы методом множителей Лагранжа как решение задачи на условный максимум с функционалом в форме шенноновской энтропии.

Появившись в конце 60-х годов прошедшего века в статистической физике, формализм Джейнса прошествовал по многим областям знания, добавив к проблеме обоснования энтропийного функционала и проблему адекватного выбора ограничений на его экстремум, поскольку до решения вариационной задачи не известно, для каких макропараметров должны выполняться ограничения в виде строгих равенств.

Но почему же в мире действуют экстремальные принципы? Готфрид Вильгельм Лейбниц считал – потому, что мы с вами живем в «лучшем из миров». Я бы хотел додумать эту мысль – в чем конкретно наш мир так хорош, что в нем действуют экстремальные принципы? Движет мной не только любопытство, но и потребность науки в поиске законов изменчивости мира, особенно в тех исследовательских областях, в которых гениальное угадывание фундаментальных уравнений еще не свершилось.

2. Категории вместо множеств

Уверенность в том, что «книга природы написана языком математики», выразил еще Галилей. С тех времен познание законов – устойчивых, повторяющихся, воспроизводимых связей в явлениях природы – как правило, сопряжено с определенными математическими структурами.

И уравнения движения, и экстремальные принципы – это инструменты теоретического естествознания. Единственный путь построения формальной теории, открытый для теоретика, состоит в подборе математической структуры, удачно описывающей интересующий исследователя фрагмент реальности. Например, эмпирическое пространство описывают трехмерным многообразием действительных чисел. Совокупность «точечных» событий мира можно описать четырехмерным многообразием Минковского с псевдоевклидовой метрикой или метрикой, учитывающей риманову кривизну. Совокупность состояний атома принято описывать векторами в бесконечномерном гильбертовом пространстве или – равносильным образом – полем бесконечных матриц. Экологическое сообщество удобно описывать множествами со структурой разбиений.

Да и сама математика, по словам многоголового автора эпохи Н. Бурбаки (1963), представляет собой переплетение нескольких математических структур – алгебраической, топологической и структуры порядка. Длительный, многовековой процесс математизации естественных наук показал и то, что каждая фундаментальная естественно-научная теория в своих основаниях связана с весьма специфическими разделами математики. Например, чтобы сформулировать законы механики, Ньютону пришлось создать дифференциальное и интегральное исчисления; теория поля неотделима от уравнений в частных производных и векторного анализа; статистическая физика – от теории вероятностей; теория относительности – от тензорного исчисления; квантовая механика – от теории бесконечномерных гильбертовых пространств.

В современной науке возникли предпосылки – идеи и разработки – для возврата к программе Эйлера. К концу XX столетия сформировалась область математического знания, позволяющая оперировать полными совокупностями одинаково структурированных множеств, а также устанавливать соответствия между классами структурированных объектов с различной аксиоматикой. Эта область – теория категорий и функторов (Букур, Деляну, 1972; Цаленко, Шульгейфер, 1974; Голдблатт, 1983; Джонстон, 1986) – включает в себя и способы сравнения по «степени структурированности» различных состояний моделируемых систем. Другими словами, на самом абстрактном уровне описания систем возникает конструктивная возможность рассчитывать количественные характеристики состояний и с их помощью выявлять экстремальные состояния системы (Акчурин, 1974; Месарович, Тахикара, 1978; Левич, 1982; Егоров и соавт., 1990; Lequizamon, 1993; Levich, Solov'yov, 1999; Левич, 2000).

До самого недавнего времени наиболее общими рамками (явно сформулированными или неявно предполагавшимися) теоретического описания систем во всякой естественно-научной теории были рамки теории множеств – любой объект исследований должен принадлежать некоторому множеству. Это приносило до сих пор, скажем, в физике и химии положительные результаты, поскольку в таких областях становилась автоматически применимой вся основанная на теории множеств математика. Но насколько концептуальная база теории множеств достаточна для построения теории любых систем? Не окажется ли более соответствующей специфике «не точных» наук теория категорий и функторов, альтернативная теории множеств в плане построения оснований математики?

Если в теории множеств конструкция отображения, или функции является производной и вспомогательной по отношению к самим множествам, то в теории категорий преобразования объектов (объекты – аналоги множеств) входят в аксиоматическое определение категории наравне с объектами. Более того, объекты оказываются частным, предельным случаем преобразований. Таким образом, при категорно-функторном описании систем акцент переносится с «застывших», «мертвых» состояний объектов на различные формы их движений и преобразований. Предметом исследования становятся не столько состояния систем, сколько совокупности способов их преобразований (вспомним, что именно такая черта, как постоянное обновление, смена, преобразование материального субстрата, есть одно из отличий большинства естественных и антропных систем).

Одними из первых в области приложения конструкций теории категорий к описанию и анализу естественных процессов и систем были работы школы математической биологии Н. Рашевского. В начале 50-х годов XX века в работах Н. Рашевского были заложены основы абстрактной биологии, существенно использующей средства теории категорий для математического моделирования биологических явлений и процессов. Концепции, введенные Н. Рашевским, получили дальнейшее развитие в работах Р. Розена, сформулировавшего принципы реляционной биологии. Р. Розен впервые применил теорию категорий с целью математического обоснования и унификации реляционной биологии и построил теорию представлений биологических систем

в категориях. Абстрактный категорно-функторный подход к системному описанию биологических явлений и процессов развивался в последующие годы в нескольких направлениях различными исследователями в области математической биологии. В результате этих исследований были построены теория систем Р. Розена, описывающая существенные особенности, обусловленные взаимосвязью метаболических и генетических процессов в живой клетке; теория «молекулярных множеств» А. Бартоломея; теория организмических суперкатегорий А. Баяну, реализующая на основе теории категорий потенциал концепции организмических множеств Н. Рашевского, и энергетическая теория абстрактных экосистем К. Легизамона. Ряд биологических проблем теории систем исследовал М. Арбиб. Формальный математический аппарат теории категорий и функторов был создан С. Эйленбергом и С. Маклейном в процессе разработки алгебраических основ теории групп гомологий и когомологий, топологических комплексов, сопряженных пространств и других объектов математики. Впоследствии выяснилось, что теория категорий и функторов является универсальной формой математического познания в той его части, которая формулируется в терминах математических структур.

Две уже упоминавшиеся особенности теоретико-категорного описания систем позволяют думать, что язык теории категорий более адекватен для описания реальности, нежели язык теории множеств. Они заслуживают того, чтобы напомнить о них еще раз. Первая особенность – возможность оперировать сразу всей совокупностью одинаково структурированных множеств, что позволяет отождествить эту совокупность с пространством всех возможных состояний системы. Вторая особенность – та, что в категорию наряду со структурированными объектами равноправно и обязательно входят все допустимые их структурой способы изменения объектов, т. е. преобразования состояний системы. Это позволяет заменить теоретико-множественное идеализированное представление мира в виде «застывших» объектов на адекватное миру представление его процессами.

Итак, будем формально описывать систему категорией структурированных множеств[2]. Категория представляет собой объединение двух классов – класса объектов и класса морфизмов. Класс объектов – это совокупность всех одинаково структурированных множеств. На языке теории систем объект – это состояние системы. Таким образом, класс объектов представляет пространство состояний системы. Представления об изменчивости системы на языке теории категорий формализованы как изменения базового множества при сохранении его структуры.

Пространство состояний содержит все потенциально возможные состояния системы. В реальности состояния системы альтернативны: истинность одного из них исключает «одновременную» истинность других. В этом смысле пространство состояний обладает «вневременными» (или по Гуцу (2004), «безвременными») свойствами: все состояния сосуществуют в нем (независимо от момента времени, в который они реализуются), а не альтернативны. И, если назвать пространство состояний «категорным временем», то отмеченные «вневременные» свойства роднят его с понятием вечности, которая содержит в себе все возможные события «изменчивого» Мира. Реальная же изменчивость системы – последовательность состояний, или траектория в пространстве состояний – может быть названа ее «системным временем».

Класс морфизмов категории – это совокупность определенных преобразований, заданных для каждой пары объектов. На языке теории систем морфизмы – допустимые структурой системы способы изменения объектов[3]. Замечу, что если классы объектов каких-либо двух категорий совпадают, но допустимые преобразования в классах морфизмов различны, то мы имеем дело с различными категориями (которые описывают различающиеся системы). Например, система, для преобразования состояний которой допустимы произвольные соответствия, отличается от той, где те же множества преобразуются взаимно однозначно. Процессы, происходящие в первой системе, богаче, чем во второй, – в ней допустимы переходы между состояниями с переменным числом элементов, в то время как во второй системе число элементов в разных состояниях одинаково.

3. Принцип экстремальной структуры

Поиск выделенных – реально осуществляющихся – состояний систем среди всех потенциально возможных в методологии экстремальных принципов требует, во-первых, умения каким-либо образом упорядочить состояния между собой на шкале «больше-меньше», «сильнее-слабее» и т. п. и, во-вторых, – выбора экстремального из этих состояний в полученном упорядочении. На языке математических структур такой поиск означает умение упорядочить структурированные множества, описывающие систему, и выбрать наиболее «сильную» (или наиболее «слабую») структуру в качестве той, что выделяет реализующееся состояние из всех возможных. Назовем сформулированное утверждение «*принципом экстремальной структуры*».

Теория категорий и функторов представляет аппарат, позволяющий сравнивать по «силе структур» любые структурированные множества (Левич, 1982). Метод сравнения легче всего понять, рассмотрев предельный случай структурированных множеств – множества без структуры. Для сравнения бесструктурных множеств можно использовать такую характеристику, как количество элементов в них (синонимы – кардинальные числа множеств, мощности множеств). Любые два множества сравнимы по количеству элементов. Для множеств со структурой характеристика по количеству элементов неинформативна, поскольку никак не связана со структурой. Однако само понятие количества элементов не первично, а возникает как математическая конструкция при сравнении множеств с помощью соответствий между ними. Термины «изменение объектов», «преобразование состояний», упомянутые в предыдущих абзацах, в данном контексте можно считать синонимами термина «соответствие». Частный случай соответствий представляют собой привычные функции, или отображения. Поясню примером метод сравнения множеств с помощью соответствий. Зададимся вопросом: чего (или кого) больше в некой комнате – кресел или людей? Один из способов ответить на этот вопрос – подсчитать количества кресел и людей, а затем сравнить полученные числа. Другой способ – установить соответствие между людьми и креслами, например попросив, чтобы каждый из присутствующих в комнате людей занял одно кресло. После того, как люди рассядутся, мы сможем точно ответить, больше ли в комнате кресел или людей, в зависимости от того, остались ли свободные кресла или – без кресла люди. Замечу, что при этом мы можем не знать ни количества стульев, ни количества людей в комнате. Повторю, что процедура сравнения множеств с помощью соответствий носит более общий характер, чем подсчет количества элементов в множествах.

Сравнение структурированных множеств с помощью преобразований (соответствий), сохраняющих имеющуюся структуру, порождает для структурированных множеств понятие «структурные числа» (Левич, 1982), обобщающее понятие «кардинальное число», или «количество элементов», используемое для множеств без структуры (структурные числа превращаются в обычные количества элементов для частного случая бесструктурных множеств). Однако структурные числа – это не конечная остановка на нашем пути к методу поиска экстремальных структур. Дело в том, что в отличие от бесструктурных множеств, которые всегда сравнимы с помощью количества элементов в них, структурированные множества могут оказаться не сравнимыми между собой, поскольку необходимые для сравнения соответствия могут существовать не для любой пары структурированных множеств. Это значит, что траектория «движения» системы от одного состояния к другому – «более сильному» – состоянию может прерваться из-за невозможности сравнить состояния, чтобы применить экстремальный принцип.

В математике существует способ обойти создавшуюся трудность с помощью метода «представлений». Метод состоит в замене объектов и преобразований одной категории объектами и преобразованиями другой. Делается это так, чтобы задаваемые структурой первой категории связи между объектами и между их преобразованиями не были нарушены. Вне математики подобный метод называют «методом аналогий». Собственно, представления из одной категории в другую и названы функторами, фигурирующими в названии теории наравне с категориями. Для любой категории структурированных множеств существует особый функтор в категорию множеств без структуры. Этот функтор сопоставляет каждому структурированному множеству совокупность его преобразований, допустимых

заданной на множестве структурой. Таким образом, в теории категорий естественно возникает числовая функция состояния – внутренне присущая теории категорий характеристика объектов категории – количество допустимых преобразований. Оказывается, что количества этих преобразований упорядочены так же, как структурные числа множеств (если структурные числа сравнимы). Доказательство этой теоремы, а также строгие формулировки приводимых здесь утверждений содержатся в работе, специально посвященной применению теории категорий и функторов для описания систем (Левич, 1982). Предложенный метод сравнения структурированных множеств называется «функторным сравнением структур», а количество допустимых преобразований структурированных множеств – их «функторными инвариантами», или «функторными числами»[4]. Замечу, что функторные числа представляют собой следующее за структурными числами обобщение понятия «количество элементов» (Левич, 2000). Согласно этому обобщению «правильное» сравнение структурированных множеств состоит в сравнении количеств их преобразований, не нарушающих заданную на множествах структуру, а не в сравнении мощностей базовых для структуры множеств. Для методологии применения экстремальных принципов оказывается очень важным, что функторные числа в отличие от структурных чисел сравнимы для любых структурированных множеств, т. е. экстремальный принцип, сформулированный на языке функторных чисел, применим для сравнения любых состояний исследуемой системы.

Уже проведенные и дальнейшие рассуждения должны продемонстрировать путь по созданию метода расчета (а не угадывания) экстремизируемых функций при применении методологии экстремальных принципов. На этом пути нам необходимо сделать следующий шаг. Количество допустимых структурой системы преобразований зависит от двух характеристик структурированного множества: от количества элементов в нем и от заданной на множестве структуры. Если мы хотим, чтобы экстремизируемая функция отражала именно свойства структуры, то вместо общего количества допустимых преобразований необходимо использовать удельное их количество (т. е. количество, приходящееся на один элемент множества всех преобразований). Величина, обратная введенному таким образом удельному инварианту, оказывается равной числу неэквивалентных (во вполне определенном математическом смысле) преобразований[5]. Можно показать, что величины, обратные к удельным функторным инвариантам, упорядочены так же, как сами функторные инварианты, т. е. задачу о поиске экстремальных состояний систем они способны решать так же, как предшествующее обобщение чисел.

4. Структурная энтропия систем

Полученная конструкция, связанная с функторными инвариантами структуры системы, известна в науке под несколько другим именем. Чтобы разъяснить это, назову сохраняющуюся при определенных допустимых преобразованиях структуру состояния системы его «макросостоянием», а допустимые этой структурой преобразования – его «микросостояниями». В новых терминах величина, обратная к удельному инварианту, оказывается количеством неэквивалентных микросостояний, соответствующих заданному макросостоянию. Позволим себе теперь взять логарифм (по основанию, большему единицы, чтобы упорядочение прологарифмированных величин не изменилось на противоположное) от этого числа микросостояний. (Можно полагать операцию по взятию логарифма данью традиции, а можно подождать обоснования этой процедуры, которое скоро появится в нашем изложении.) В полученной конструкции искушенный читатель сразу узнает римейк больцмановского определения энтропии. Поэтому назову логарифм числа неэквивалентных допустимых преобразований данного состояния системы его «обобщенной энтропией» (синонимы: теоретико-категорная, функторная, структурная энтропия). Все сказанное выше позволяет считать обобщенную энтропию, во-первых, мерой структурированности состояний системы (можно уточнить – мерой удаленности состояния от его бесструктурного аналога, энтропия которого равна нулю) и, во-вторых, функцией состояния, непосредственно связанной с обобщением понятия количества элементов для структурированных множеств. Замечу, что возникшая конструкция энтропии получена вне каких-либо статистических или вероятностных предпосылок. Величина

обобщенной энтропии может быть строго рассчитана для состояний любых систем, эксплицируемых математическими структурами. Она может быть вычислена для состояний, описываемых множествами с любым – большим или малым – количеством элементов. Вероятностные интерпретации могут возникать при рассмотрении определенных типов систем, но они совершенно не обязательны для расчетов энтропии. Для некоторых математических структур, например для множеств с разбиениями, формула для обобщенной энтропии близко совпадает с формулами для энтропии идеального газа Л. Больцмана или для энтропии каналов связи К. Шеннона[6]. Функторные инварианты многих (а возможно, и всех) математических структур могут быть выражены через инварианты ассоциированных со структурами разбиений. Возможно, этот математический факт объясняет «вездесущность» появления энтропии при описании самых различных естественных и антропных систем. А упомянутая выше связь конструкции энтропии с обобщением понятия «количество элементов» может служить методическим обоснованием методологического принципа, согласно которому «числа правят миром». Таким образом, появляется строгий метод расчета энтропии систем, поддающихся (или – нет, см. сноску 2) формальному описанию с помощью математических структур, и алгоритм порождения целевых функций для экстремальных задач[7].

В рамках поставленной задачи по поиску экстремального принципа проследим цепочку возникших в ходе исследования формулировок:

1) Следует отыскивать экстремальное состояние системы.

2) Для системы, моделируемой структурированными множествами, следует отыскивать состояние с экстремальной (например, с наиболее «сильной») структурой.

3) Следует отыскивать состояние системы, обладающее наименьшим удельным функторным инвариантом или наибольшим количеством неэквивалентных допустимых структурой системы преобразований.

4) Следует отыскивать состояние, обобщенная энтропия которого максимальна.

5. Системы и ресурсы

Осталось сделать заключительный шаг на пути формулирования искомого экстремального принципа. Этот шаг не следует из предшествующих построений, а связан с таким свойством изменяющихся систем, как открытость по отношению к потребляемым ресурсам. Я исхожу из исследовательской установки, утверждающей, что любые изменяющиеся системы потребляют некоторый ресурс (Левич, 2009). Такое утверждение очевидно для систем, открытых по отношению к энергии или веществу, менее очевидно – для изолированных систем, например, если изменение представляет собой механическое движение закрытой системы. (Ресурсом, «потребляемым» такой движущейся системой, можно считать (Левич, 1996) необходимое для движения пространство.) Впрочем, не согласный с моей установкой читатель может полагать, что рассмотрен лишь класс открытых в его понимании систем. Я постулирую (см. статью автора в физическом разделе этой книги и процитированные в статье более ранние работы), что наша Вселенная открыта для субстанциональных потоков, принадлежащих глубинным уровням строения материи и, возможно, не идентифицируемых современными экспериментальными технологиями. Любые изменения (и любое движение, в частности) прямо или косвенно индуцированы этими потоками, которые являются ресурсами, «потребляемыми» меняющимися системами. Именно потребляемые системой ресурсы задают последовательность состояний, лукаво заменившую подлежащий определению термин «время» в определение системного времени.

«Ресурс» субстанциональных потоков не только порождает последовательность смены состояний, но и ограничивает степень их изменчивости, поскольку без ограничения по ресурсам требование реализации максимальной структуры свелось бы к неограниченной экспансии системы. Из-за этого в экстремальном принципе, порождающем закон изменчивости, экстремум обязательно должен быть условным и появление представлений об ограничивающих ресурсах необходимо, а не случайно.

В силу сказанного искомый принцип может звучать следующим образом: *из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого обобщенная энтропия максимальна в пределах, задаваемых доступными системе ресурсами.* Замечу, что среди состояний, в которые переходит заданное состояние, рассматривается и оно само. Упоминание об ограничениях ресурсами – основное отличие приведенного принципа от Второго начала термодинамики (действующего исключительно в закрытых системах). Безусловный максимум энтропии, требуемый Вторым началом, приводит к однородному распределению характеристик системы, называемому «тепловой смертью». Условный экстремум энтропии для открытых, но ограниченных по ресурсам систем влечет неоднородные распределения. Причем степень их неоднородности может быть сколь угодно велика в зависимости от различий компонентов исследуемой системы по «потребностям» в ресурсах, ограничивающих развитие (Левич, 1980).

Предложенный экстремальный принцип имеет важную темпоральную интерпретацию. Для меня понятие времени является синонимом изменчивости объектов в мире. Часы есть способ измерения, или параметризации, этой изменчивости. Системным временем названа последовательность состояний меняющейся системы. Каждому последовательному состоянию системы – «моменту» ее системного времени – в рамках теоретико-категорного описания соответствует «сила структуры» этого состояния. Согласно принятому принципу максимальной структуры «сила структур» возрастает монотонно системному времени. Время, задаваемое структурными числами состояний, можно назвать «структурным временем» системы. Энтропийный экстремальный принцип влечет монотонное увеличение энтропии состояний вдоль траектории изменчивости (последовательности состояний) системы. Тем самым значения энтропии параметризуют изменения системы. Другими словами, возникает энтропийная параметризация времени, или энтропийное время систем (Левич, 2004а). Интервал энтропийного времени, т. е. приращение энтропии, есть логарифм величины, показывающей, во сколько раз изменилось число допустимых структурой системы неэквивалентных преобразований.

6. Время как ресурс

Существует еще один набор числовых характеристик системы, которые: 1) с необходимостью сопровождают изменчивость системы; 2) растут монотонно системному времени и тем самым 3) могут служить для параметризации изменений. Это – потребляемые системой ресурсы. Количество «потребленного» (плюс «потерянного») ресурса определяет «показания» так называемых «метаболических часов» системы (Левич, 1996; 2009). Конструкция метаболических часов неявно подразумевает умение подсчитывать количество замененных в системе элементов. Но процедура сравнения множеств по количеству элементов в них в «теоретико-множественной» математике корректно разработана лишь для бесструктурных множеств, тогда как все теоретическое естествознание использует для формальных описаний множества со структурами. В частности, системы с несколькими ресурсными потоками уже не могут быть представлены как иерархии бесструктурных множеств. Поэтому нетривиальное применение метаболического подхода требует умения сравнивать между собой множества со структурой. Это умение задается функторным методом сравнения структур, предлагая энтропию математических структур в качестве обобщения понятия «количество». Тем самым энтропийная параметризация изменчивости есть необходимое обобщение метаболических часов. Замечу, что система, потребляющая несколько ресурсов, существует в нескольких метаболических временах. Теоремы вариационного моделирования позволяют установить связь между энтропийным и метаболическими временами системы (Левич и соавт., 1994). Энтропия системы представляет собой «усреднитель» метаболических времен, причем энтропия монотонно растет вместе с ростом каждого из метаболических времен, т. е. энтропийное и метаболические времена системы связаны однозначно, монотонно и одно может быть вычислено через другое[8]. Указанная связь может служить эвристическим объяснением происхождения логарифмирования при вычислении энтропии через количество преобразований системы: благодаря логарифмированию, связь между энтропийным и метаболическими временами становится степенной, а не экспоненциальной, что, в свою очередь, упрощает формулы, в которых фигурируют обе параметризации времени. И если метаболическое время системы, вообще говоря, – многокомпонентная величина и тем самым «уровнеспецифично» (имеются в виду иерархические уровни строения систем), то энтропийное время, «усредняя» метаболические времена уровней, возвращает понятию времени привычную универсальность.

Предложенный экстремальный принцип имеет еще одну строгую интерпретацию, связанную с метаболическим временем системы. Эта интерпретация следует из так называемой теоремы Гиббса (Левич, Фурсова, 2002). Согласно теореме требование максимума обобщенной энтропии при ограниченном запасе некоторых ресурсов равносильно требованию минимума потребления системой этих ресурсов при том ограничении, что степень структурированности системы (выраженная значением обобщенной энтропии) должна быть не ниже некоторого порога.

Соответствующая формулировка экстремального принципа звучит так: *из заданного состояния система переходит в такое состояние, для которого потребление ограничивающих рост ресурсов (или метаболическое время системы) минимально в пределах, задаваемых необходимой степенью структурированности системы.*

7. Обобщение формализма Джейнса

Резюмирую полученные результаты:

1) Деятельность теоретика-модельера по описанию естественных и антропных систем базируется на подборе подходящих математических структур. Для оперирования классами структурированных множеств предназначена математическая теория категорий и функторов.

2) Система может быть формально описана категорией, содержащей класс объектов – состояний системы – и класс морфизмов – допустимых структурой системы способов преобразований одних состояний в другие.

3) Состояния систем, описываемых математическим структурами, могут быть упорядочены методами теории категорий по «степени их структурированности».

4) Постулировано, что динамика системы определяется принципом максимальной структуры: из заданного состояния система переходит в то состояние, структура которого максимальна (в пределах доступных системе ресурсов).

5) Предложен строгий метод, позволяющий каждому состоянию системы сопоставить числовую функцию, значе-

ния которой монотонны степени структурированности состояния и могут служить ее мерой.

Значение этой функции рассчитывают через количество допустимых системой неэквивалентных преобразований.

Эта функция обобщает понятие «количество элементов», определенное для бесструктурных множеств, на множества со структурой.

Эта функция может быть интерпретирована как обобщение статистической энтропии и может быть названа обобщенной (структурной, функторной, теоретико-категорной) энтропией.

Структурная энтропия получена вне каких-либо статистических или вероятностных представлений.

Принцип максимальной структуры должен быть переформулирован в этом случае как принцип максимума (обобщенной) энтропии. От Второго начала термодинамики его отличает применение к открытым (в самом общем смысле) системам и обязательное требование ограничений по ресурсам.

6) Введены и сопоставлены представления о собственных временах систем: время категорное, время системное, время структурное, время энтропийное и время метаболическое.

Категорное и системное времена описывают качественные аспекты изменчивости систем. Структурное, энтропийное и метаболическое времена предоставляют способы количественного измерения изменчивости, т. е. вводят различные типы часов для измерения собственного времени систем[9]. Экстремальный принцип может быть переформулирован как принцип минимального метаболического времени систем.

7) Принцип максимума энтропии эквивалентен:

• принципу реализации экстремального состояния системы;

• принципу реализации максимальной структуры («сложности», «разнообразия», «структурной информации» и т. п.);

• принципу максимальной (обобщенной) экспансии системы, т. е. ее «количественному» росту;

• принципу наименьшего «потребления» ограничивающих ресурсов или их определенной комбинации, которую можно назвать «обобщенной свободной энергией» системы;

• принципу минимального метаболического времени системы.

8) Построены компоненты динамической теории:

• Элементарные объекты – множества со структурой.

• Совокупность элементарных объектов составляет класс объектов категории, описывающей систему, и задает пространство состояний системы.

• Способы изменчивости элементарных объектов – их преобразования из класса морфизмов описывающей систему категории.

• Интервал времени, измеряющий изменения при переходе системы из одного состояния в другое «энтропийными часами», есть разность обобщенных энтропий начального и конечного состояний.

• Закон изменчивости – экстремальный принцип, использующий свойство упорядоченности объектов категории.

Полученные результаты позволяют предложить для отыскания законов изменчивости систем формализм, основанный на принципе максимума обобщенной энтропии. Этот формализм развивает формализм Джейнса и состоит из следующих этапов[10]:

• Выбор математической структуры, адекватно описывающей исследуемую систему.

• Формализация структуры в виде множеств морфизмов и объектов некоторой категории структурированных множеств.

• Расчет обобщенной энтропии через количества допустимых структурой неэквивалентных морфизмов. Функция обобщенной энтропии может быть строго рассчитана для любых описаний систем с помощью математических структур, т. е. целевая функция для применений экстремального принципа может быть рассчитана, а не угадана.

• Формулировка ресурсных и других ограничивающих развитие сообщества условий в виде неравенств или равенств. (Современные методы вариационного исчисления позволяют исследовать задачи с ограничениями в виде неравенств, а не равенств. Это, казалось бы, небольшое техническое усовершенствование влечет радикальное расширение возможностей вариационного моделирования на актуальные и реалистичные классы сложных задач.)

• Постановка вариационной задачи на условный экстремум обобщенной энтропии с найденными ограничениями.

• Поиск лимитирующих ресурсов и других лимитирующих факторов на основе теоремы стратификации[11].

• Постановка редуцированной вариационной задачи на условный экстремум с ограничениями в виде равенств.

• Формулировка закона изменчивости системы в виде аналога уравнения Эйлера–Лагранжа полученной вариационной задачи.

СНОСКИ

[1] Можно перечислить следующие предлагавшиеся целевые функции (Фурсова и соавт., 2003): максимальный поток энергии через систему (Lotka, 1922), максимум «силы» (Odum, Pinkerton, 1955), максимальное рассеяние энергии (Ulanowicz, Hannon, 1987; Schneider, Kay, 1994; Mauersberger, 1996), запасание «максимальной эксергии» (Jørgensen, 1997), асценденция (Ulanowicz, 1986), индекс зрелости (Pérez-España, Arreguin-Sánchez, 1999), максимизация косвенных эффектов (Patten, 1986; 1995), максимизация биомассы (Margalef, 1968), специальная иерархическая организация (O'Neill et al., 1986), максимум устойчивости органического вещества (Whittaker, Woodwell, 1971), максимизация разнообразия (Левич, 1980), минимизация диссипации энергии и «наискорейший спуск» (А.И. Зотин, А.А. Зотин, 1999).

[2] Замечу, что теоретико-категорное описание систем не требует обязательной экспликации системы математической структурой. Возможно «качественное» категорное описание, т. е. непосредственное перечисление и описание состояний системы и всех переходов между ними (морфизмов) не на математическом, а на внутридисциплинарном содержательном языке (некоторым аналогом чего может, например, служить карта метаболических путей живой клетки) с последующим подсчетом числа морфизмов и выбором последовательности реализующихся состояний согласно экстремальному принципу.

Замечу, что если задана математическая структура, то возможно задание сохраняющих ее морфизмов. Необходимость обратного утверждения для приложений не обязательна: если заданы морфизмы, то может и не существовать математической структуры с известной аксиоматикой, которую они «сохраняют». Объекты «качественной категории» и будут реализацией соответствующей заданным морфизмам структуры.

[3] Экстремизируемые функционалы в механике, в теории поля должны быть инвариантными по отношению к определенным групповым преобразованиям, эксплицирующим требования заданных симметрий Мира. Этих требований может быть достаточно для однозначного выбора функционала. Можно провести аналогию между сохранением структуры и групповым принципом симметрии, а также между соответствующими морфизмами структуры и групповыми преобразованиями. Однако категорный язык предоставляет гораздо более широкие возможности, не ограниченные лишь групповыми структурами. Целевые функции и функционалы, возникающие в теории категорий, с самого начала обладают необходимыми свойствами инвариантности.

[4] Теория категорий не просто представляет удобный язык для описания систем, а выступает как источник строгих результатов (теорем) при решении задачи о сравнении структурированных множеств. Метод функторного сравнения структур вряд ли мог бы быть естественно сформулирован вне теории категорий.

[5] При конструировании понятия «количество элементов», или «мощность» для бесструктурных множеств эти множества сравнивают с помощью инъективных отображений. Структурированные множества сравнивают с помощью инъективных морфизмов структуры. Возникающие отношения порядка стандартным образом порождают как в классе объектов, так и в класс морфизмов отношения эквивалентности.

На языке теории систем это приводит к неразличимости некоторых состояний и некоторых их преобразований. Поэтому задача о подсчете количества преобразований должна быть поставлена как задача подсчета количества неэквивалентных морфизмов. В случае, когда преобразования образуют группу, задача решается с помощью теоремы Лагранжа о количестве элементов в факторгруппе. Так, например, для биекций это количество равно $n!/\prod_i n_i!$, где числитель – число биекций для множества из n элементов, а знаменатель – число биекций, сохраняющих разбиение исходного множества на i классов (сохраняющие разбиение биекции составляют нормальную подгруппу группы биекций для множества, объединяющего классы эквивалентности).

Я высказываю предположение: для подсчета числа неэквивалентных морфизмов в полугруппе (любая категория есть частичная полугруппа) справедлив аналог теоремы Лагранжа. Точнее, достаточно, чтобы соответствующая теорема выполнялась не в произвольной полугруппе, а в полугруппе, порождаемой категорией структурированных множеств (или хотя бы – категорией множеств со структурой разбиений).

[6] Энтропия перехода из состояния X в состояние A может быть рассчитана по следующей формуле (Levich, 1995; Левич 1996):

$$H^X(A) = \frac{I^X_{\tilde{Q}}(A)}{I^X_Q(A)},$$

где $I^X_Q(A)$ · число морфизмов из множества X в множество A в категории структурированных множеств Q, а $I_{\tilde{Q}}^{X}(A)$ – число морфизмов из множества X в множество A в категории бесструктурных множеств $\tilde{Q}$ с теми же по мощности множествами, что и в категории Q, но со «стертой структурой».

Приведу примеры значений энтропии для множеств со структурой разбиений.

Пусть допустимые морфизмы – сохраняющие разбиение отображения. Тогда

$$H^X(A) = \log \frac{n_A^{n_{\tilde{Q}}}}{\prod_i n_{iA}^{n_{iX}}} = -n_X \sum_i \frac{n_{iX}}{n_X} \log \frac{n_{iA}}{n_A},$$

где n_{iA} и n_{iX} – количества элементов в классе i разбиений множеств A и X; $n_A = \sum_i n_{iA}$ и $n_X = \sum_i n_{iX}$ - полные количества элементов в множествах A и X.

Если допустимые морфизмы – сохраняющие разбиение биекции, то

$$H^X(A) = \log \frac{n!}{\prod_i n_i!}.$$

Если допустимые морфизмы – сохраняющие разбиение произвольные соответствия, то

$$H^X(A) = \log \frac{2^{n_A n_X}}{\prod_i 2^{n_{iA} n_{iX}}} = n_A n_X \left(1 - \sum_i \frac{n_{iA}}{n_A} \frac{n_{iX}}{n_X}\right).$$

Формулы справедливы при любых – и больших, и самых малых – значениях n_i и n.

[7] В зависимости от области приложения энтропийного подхода возникают самые разнообразные толкования энтропии: как меры неопределенности (Tribus, 1961); меры «незнания» истинного микросостояния системы, находящейся в известном макросостоянии (Gell-Mann, 1994); меры порядка-беспорядка, сложности и организованности (Хайтун, 1996); меры неточности контроля над частицами (Губин, 1997), а также как разновидности функционала действия в гамильтоновой механике (Хазен, 1998).

Подобные интерпретации кажутся мне вторичными по отношению к той, которую вкладывал в термин «энтропия» Р.Ю. Клаузиус (Clausius, 1865), переводя его с греческого τροπη как «превращение» или, имея в виду роль Второго закона термодинамики для развития Мира, как «эволюцию». Происхождение энтропии из анализа допустимых системой преобразований сохраняет эту традицию.

[8] Эта связь задается формулой:

$$H(L) = \sum_k \lambda^k(L) L^k.$$

Здесь H – структурная энтропия, $L \equiv \{L^1, L^2, ..., L^m\}$ – набор метаболических времен системы, $\lambda^k(L)$ – множители Лагранжа вариационной задачи на условный максимум структурной энтропии, ограниченной потоками метаболических времен L^k.

В случае структуры множеств с разбиениями, где морфизмами служат сохраняющие разбиение отображения, вариационная задача имеет вид:

$$\begin{cases} H(n_1, n_2, ..., n_w) = -n \sum_{i=1}^{w} \frac{n_i}{n} \log \frac{n_i}{n} \to \max; \\ \sum_{i=1}^{w} q_i^k n_i \le L^k, \ k = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{w} n_i = n; \\ n_i \ge 0, \ i = \overline{1,w}. \end{cases}$$

Здесь n_i – количество элементов в классе разбиения i, w – число классов разбиения и q_i^k - среднее «содержание субстанции» метаболического потока k в элементах класса i.

Доказано (Левич, Фурсова, 2002), что $\partial H / \partial L^k \ge 0$, т. е. структурная энтропия монотонно возрастает (не убывает) в метаболическом времени системы.

[9] Конструкции структурного и энтропийного времени включают целый ряд произвольно выбранных формальных шагов. Например, сравнение структурированных множеств, описывающих состояние систем, производится с помощью инъективных преобразований (по аналогии со сравнением по мощностям неструктурированных множеств). В качестве представления из категории структурированных в категорию неструктурированных множеств, порождающего энтропийное время, в функторном методе сравнения структур выбран основной одноместный функтор. Этот функтор оказался монотонным по упорядочению структур и его значения оказались сводимыми к энтропиеобразным функциям. Инъективные преобразования, лежащие в основе упорядочения структур, представляют собой однозначные вложения. То есть эволюция систем, согласно экстремальному принципу, идет от подобъектов к объектам. Такой тип эволюции можно назвать консервативным или казуальным: достигнутые состояния не пропадают (подобъект «сохраняется» в объекте) и новые состояния возникают не на пустом месте, а из своих «менее сильных» (в смысле упорядочения по силе структуры) предшественников. Использование для сравнения состояний вместо инъективных иных типов преобразований так же, как и отыскание иных функторов, монотонно представляющих упорядочение структур числами, могут породить иные типы структурного и энтропийного времени и иные типы эволюции систем. Следует отметить, что выбор упорядочивающих морфизмов – вопрос экспликации операциональных спосо-

бов выяснения принадлежности элементов объектам. Тем самым вопрос об адекватной параметризации изменчивости становится зависимым от «суммы технологий, достигнутой цивилизацией» в области экспериментальной идентификации объектов мира.

[10] Пример применения предложенного формализма в экологии сообществ продемонстрирован в нескольких публикациях (Левич и соавт., 1997; Levich, 2000; Левич, 2004б).

[11] Формулировка теоремы (Левич и соавт., 1994): пространство ресурсов $\prod_{k=1}^{m} L^k$ распадается (стратифицируется) на 2^m-1 непересекающихся областей (стратов), каждая из которых соответствует одному из подмножеств множества «потребляемых» ресурсов. В страте S^J, где $J \neq \varnothing$ – подмножество множества ресурсов $\{1,2,...,m\}$, выполняется:

1) решения вариационной задачи (см. сноску (8)) $n_i(L)$, где $L \equiv \{L^1, L^2, ..., L^m\}$, зависят только от тех L^k, для которых $k \in J$ (отмечу, что решение указанной задачи существует и единственно);

2) на этом решении нестрогие неравенства $\sum_{i=1}^{w} q_i^k n_i \leq L^k$ обращаются в строгие равенства для всех $k \in J$ и в строгие неравенства для всех $k \notin J$.

Теорема дает алгоритм расчета границ областей лимитирования по заданному набору характеристик q_i^k.

ЛИТЕРАТУРА

Акчурин И.А. Единство естественнонаучного знания. М.: Наука, 1974. 207 с.

Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 259 с.

Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Мир, 1963. С. 245–259.

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983. 488 с.

Голицын Г.А., Левич А.П. Вариационные принципы в научном знании // Философские науки. 2004. № 1. С. 105–136.

Губин В.Б. История с энтропией // Философские науки. 1997. Вып. 3–4. С. 98–120.

Гуц А.К. Элементы теории времени. Омск: Изд-во Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. 364 с.

Джонстон П.Т. Теория топосов. М.: Наука, 1986. 440 с.

Егоров А.А., Ощепков А.П., Степанов Б.В. Категорные методы в автоматизированных системах управления. Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1990. 81 с.

Зотин А.И., Зотин А.А. Направление, скорость и механизмы прогрессивной эволюции: Термодинамические и экспериментальные основы. М.: Наука, 1999. 320 с.

Левич А.П. Структура экологических сообществ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. 180 с.

Левич А.П. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 190 с.

Левич А.П. Время как изменчивость естественных систем: способы количественного описания изменений и порождение изменений субстанциональными потоками // Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть 1. Междисциплинарное исследование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. С. 149–192.

Левич А.П. Энтропия как мера структурированности сложных систем // Время, хаос и математические проблемы. М.: Институт исследований сложных систем МГУ им. М.В. Ломоносова. Вып. 2. 2000. С. 163–176.

Левич А.П. Энтропийная параметризация времени в общей теории систем // Системный подход в современной науке. М.: Прогресс-Традиция, 2004а. С. 167–190.

Левич А.П. Принцип максимума энтропии и теоремы вариационного моделирования // Успехи современной биологии. 2004б. Т. 124. № 6. С. 3–21.

Левич А.П. Моделирование природных референтов времени: метаболическое время и пространство // На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании. Часть 3. Методология. Физика. Биология. Математика. Теория систем. 2009. С. 259–335.

Левич А.П., Фурсова П.В. Задачи и теоремы вариационного моделирования в экологии сообществ // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. № 4. С. 1035–1045.

Левич А.П., Алексеев В.Л., Никулин В.А. Математические аспекты вариационного моделирования // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 5. С. 55–71.

Левич А.П., Максимов В.Н., Булгаков Н.Г. Теоретическая и экспериментальная экология фитопланктона: управление структурой и функциями сообществ. М.: Изд-во НИЛ, 1997. 192 с.

Месарович Н., Тахикара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 312 с.

Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз. 1960. 600 с.

Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Прогресс, 1985. 328 с.

Фурсова П.В., Левич А.П., Алексеев В.Л. Экстремальные принципы в математической биологии // Успехи современной биологии. 2003. Т. 123. № 2. С. 115–137.

Хазен А.М. Введение меры информации в аксиоматическую базу механики. М.: Рауб, 1998. 168 с.

Хайтун С.Д. Механика и необратимость. М.: Янус, 1996. 448 с.

Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий. М.: Наука, 1974. 256 с.

Clausius R. Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie //Ann. Phys. Folge 2. 1865. Bd. 125. S. 353–400.

Gell-Mann M. The quark and the jaguar: adventures in the simple and the complex. New York: W.H. Freeman, 1994. 392 p.

Gzyl M. The method of maximum Entropy. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1995. 146 p.

Jaynes E.T. Informational theory and statistical mechanics // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 620–630.

Jørgensen S.E. Integration of Ecosystem Theories: a Pattern 2nd. Dordrecht: Kluwer, 1997. 400 p.

Lequizamon C.A. The periodic continuous effect in terms of algebraic relation theory // Int. Journal of Biological Systems. 1993. V. 1. No 1.

Levich A.P. Time as variability of natural systems // On the Way to Understanding the Time Phenomenon. Part 1. Singopore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1995. P. 149–192.

Levich A.P. Variational modelling theorems and algocoenoses functioning principles // Ecological Modelling. 2000. V. 131. P. 207–227.

Levich A.P., Solov'yov A.V. Category-functor modeling of natural systems // Cybernetics and Systems. 1999. V. 30. № 6. P. 571–585.

Lotka A.J. Contribution to the energetics of evolution // Proc. Natl. Acad. Sci. 1922. № 8. P. 14–150.

Margalef R. Perspectives in ecological theory. Chicago: Chicago University Press,1968. 122 p.

Mauersberger P. From a theory of local processes in aquatic ecosystems to a theory at the ecosystem scale // Sci. Total Environ. 1996. 183. P. 99–106.

*Odum H.T., Pinkerton R.C. T*ime's speed regulator: the optimum efficiency for maximum power output in physical and biological systems // Am. Sci. 1955. 43. P. 331–343.

O'Neill R.V., Deangelis D.I., Waide J.B., Allen T.F.H. A Hierarchical Concept of Ecosystems. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986. 392 p.

Patten B.C. Energy cycling, length of food chains, and direct versus indirect effects in ecosystems // Ecosystem Theory for Biological Oceanography. Can. Bull. Fish. Aquat. Sci. 1986. 213. P. 119–138.

Patten B.C. Network integration of ecological extremal principles: exergy, emergy, power, ascendency and indirect effects // Ecological modelling. 1995. 79. P. 75–84.

Pérez-Espaca H., Arreguin-Sánchez F. A measure of ecosystem maturity // Ecologocal Modelling. 1999. 119. P. 79–85.

Schneider E.D., Kay J.J. Life as a manifestation of the second law of thermodynamics // Math. Comput. Model. 1994. 19. P. 25–48.

Tribus M. Information theory as the basic for thermostatics and thermodynamics //J. Appl. Mech. Ser. E. 1961. V. 28. № 1. P. 1–8.

Ulanowicz R.E. Growth and development: Ecosystems Phenomenology. N.Y.: Springer, 1986. 203 p.

Ulanowicz R.E., Hannon B.M. Life and production of entropy // Proc. R. Soc. Lond. 1987. 232. P. 181–192.

Whittaker R.H., Woodwell G.M. Evolution of natural communities // Ecosystem Structure and Function. Corvallis: Oregon State University Press. 1971. P. 137–159.