Системы и модели: границы интерпретаций.— Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2008.— С. 25-33.

Язык категорий и функторов как архетип количественного и динамического описания Мира[1]

А.П.Левич, Москва, Россия

Работа посвящена поиску языка для описания теоретического знания: 1) предоставляющего архетип видения Мира как процесса, а не объекта; 2) достаточно универсального для применения в междисциплинарном знании; 3) достаточно строгого для возможности формализации знания и 4) позволяющего эксплицировать базовые общенаучные понятия.

Процесс познания включает две противоположные тенденции – дифференциацию и универсализацию объектов и методов исследования. Внутридисциплинарные исследования тяготеют к первой тенденции и порою опережают междисциплинарные и системные подходы к описанию Мира. Отсутствие взаимопонимания между специалистами, безусловно, негативно сказывается на развитии науки в целом и в каждой ее области. Взаимопонимание невозможно без общего и научно строгого языка общения.

Поясню на примерах, чем метод теории множеств отличается от метода теории категорий. «Хотя математика и тяготеет к изучению абстрактных объектов, уровень абстракции может быть очень разный. Самая простая абстракция – это переход от «двух яблок», «двух камней» и т. д. к понятию числа 2; переход от «я повернулся боком», «камень повернулся боком» к понятию поворота на 90°. При этом манипулирование предметами заменяется на универсальные законы работы с числами (или с преобразованиями, или с чем-то еще). Абстракция следующего уровня возникает, когда понимаешь, что правила обращения с числами 2, 3, 15 и т. д. по сути одинаковы. Все эти числа можно складывать, перемножать, для них работают переместительный, сочетательный и другие законы. Иными словами, все целые числа «играют по одним правилам». Поэтому часто полезно оперировать не с конкретными числами, а с новым математическим объектом – кольцом целых чисел. Аналогично, разные повороты предмета в пространстве являются элементами нового математического объекта – группы трехмерных вращений. Третий уровень абстракции – это когда исчезает «осязаемость» эле-

[1] Работа поддержана грантами РГНФ (№06-03-00163а) и РФФИ (№08-06-00073а).

ментов групп, колец, полей. Тут уже рассматриваются не конкретные группы вращений или иных преобразований, а просто абстрактные группы – совокупности элементов со строго очерченными свойствами. Здесь на первый план выходит то, какова структура группы, а не то, из чего она «состоит». Свойства всевозможных непротиворечивых математических структур, безотносительно к тому, где именно эти структуры возникают, изучает абстрактная алгебра. Теория категорий предлагает подняться еще выше, на четвертый уровень абстракции. В ней изучаются уже не конкретные группы, а сеть математических взаимосвязей между разными группами. Аналогично, изучается сеть взаимосвязей между самыми разными типами пространств или между самыми разными кольцами. Более того, оказывается, что эти сети взаимосвязей (групп, полей, пространств и т. д.) – очень шаблонны. Между ними (между сетями!) можно установить параллели, и с помощью этих параллелей высокого уровня иногда удается решить очень трудные, но вполне конкретные задачи» [4].

Математическая теория категорий и функторов возникла внутри математики в середине прошлого века. Через полтора десятка лет появились первые попытки применить теорию в естествознание. В 70-е годы появились робкие философско-методологические работы по осмысливанию роли новой теории в научном знании. За последние 30 с лишним лет существенно возрос спектр применений теории вне самой математики.

Формальный математический аппарат теории категорий и функторов был создан С.Эйленбергом и С.Маклейном [5] в процессе разработки алгебраических основ теории групп гомологий и когомологий, топологических комплексов, сопряженных пространств и других объектов математики. Впоследствии выяснилось, что теория категорий и функторов является универсальной формой математического познания в той его части, которая формулируется в терминах математических структур[6].

Одними из первых в области приложения конструкций теории категорий к описанию и анализу естественных процессов и систем были работы школы математической биологии Н.Рашевского[7]. В начале пятидесятых годов XX века в работах Н.Рашевского были заложены основы абстрактной биологии, существенно использующей средства теории категорий для математического моделирования биологических явлений и процессов. Концепции, введенные Н.Рашевским, получили дальнейшее развитие в работах Р.Розена, сформулировавшего принципы реляционной биологии. Р.Розен [8] впервые применил теорию категорий с целью математического обоснования и унификации реляционной биологии и построил теорию представлений биологических систем в категориях. Абстрактный категорно-функторный подход к системному описанию биологических явлений и процессов развивался в последующие годы в нескольких направлениях различными исследователями в области математической биологии. В результате этих исследований были построены теория систем Р.Розена, описывающая существенные особенности, обусловленные взаимосвязью метаболических и генетических процессов в живой клетке; теория "молекулярных множеств" А.Бартоломея [9]; теория организмических суперкатегорий А.Баяну [10], реализующая на основе теории категорий потенциал концепции организмических множеств Н.Рашевского, и энергетическая теория абстрактных экосистем К.Легизамона [11]. Ряд биологических проблем теории систем исследовал М.Арбиб [12].

В 1974 году вышла книга И.А.Акчурина [13], где со всей отчетливостью была декларирована решающая роль категорий, функторов и топосов в проблеме единства естественнонаучного знания. Действенность аппарата теории категорий и функторов продемонстрирована в решении конкретных задач теоретической биологии [3]. Одна из пионерских работ по применению теории категорий в описании физической картины мира вышла в 1990 году[14].

«Недавно появилось эссе Боба Коуке [15], сотрудника Вычислительной лаборатории Оксфордского университета, озаглавленное «*Введение в теорию категорий для практикующего физика*». В нём автор защищает точку зрения, которая наверняка удивит многих физиков. Он считает, что физикам-теоретикам просто необходимо знать и уметь применять теорию категорий, поскольку они и так работают с категориями (в математически строгом смысле слова), сами того не подозревая. Автор эссе утверждает, что именно «опыт распознавания структур», который уже накопила теория категорий, будет очень полезен физикам-теоретикам. В качестве конкретного примера он берет такой раздел физики, как квантовая механика, и постепенно облекает ее в категорную форму. Оказывается, многие ключевые для квантовой механики понятия, например принцип суперпозиции (благодаря которому возможны запутанные состояния), локальность, причинность и т. д., возникают в подходящих категориях сами собой. В них даже находятся готовые аналоги для не до конца понятого процесса измерения квантовой системы.

В чем польза от такой переформулировки квантовой теории? Раз квантовая механика точь-в-точь вписывается в «трафарет» теории категорий, то значит, сеть взаимосвязей между квантовыми объектами можно как бы увидеть «с высоты птичьего полета», не прибегая к конкретным вычислениям. И тогда некоторые нетривиальные результаты квантовой теории (например, теорема о невозможности клонирования квантового состояния, квантовая телепортация и т. п.) становятся очень естественными в категорной формулировке.

Мощь теории категорий можно поставить «на конвейер» и использовать в рутинных вычислениях. Несколько лет назад Боб Коуке с коллегами на основе теории категорий разработал простой «картиночный формализм», заменяющий собой формульные вычисления в квантовой теории информации. Чтобы подчеркнуть, насколько простыми становятся вычисления в этом подходе, автор назвал одну из своих статей «*Детсадовская квантовая механика*». Автор эссе в заключении говорит, что категории являются мощным и гибким «шаблоном», с уже готовыми конструкциями и теоремами, по которому можно строить самые разные физические теории, а не только квантовую теорию информации. Возможно, с их помощью будут открыты новые глубокие связи между уже существующими теориями. Поэтому он призывает к тому, чтобы включать курс теории категорий в университетские программы не только математиков, но и физиков и даже информатиков» [4].

Перечислю конкретные вопросы, решению которых может помочь язык теории категорий:

1) «Границы моего языка означают границы моего Мира» [1]. Поскольку окружающий Мир – мир процессов, а не мир объектов, то для его адекватного описания нужен и язык процессов.

До самого недавнего времени наиболее общими рамками теоретического описания систем (явно сформулированными или неявно предполагавшимися) были рамки теории множеств – любой объект исследований должен принадлежать некоторому множеству. Это приносило до сих пор, скажем, в физике и химии положительные результаты, поскольку в таких областях становилась автоматически применимой вся основанная на теории множеств математика. Но насколько концептуальная база теории множеств достаточна для построения теории любых систем? «Динамическое» видение Мира требует отличный от теоретико-множественного архетип мышления. Не окажется ли более соответствующей специфике "не точных" наук теория категорий и функторов, альтернативная теории множеств в плане построения оснований математики?

Если в теории множеств конструкция отображения, или функции, является не первичной и вспомогательной по отношению к самим множествам, то в теории категорий преобразования объектов (объекты – аналоги множеств, преобразования – аналоги отображений) входят в аксиоматическое определение категории наравне с объектами. Более того, объекты оказываются частным, предельным случаем преобразований. Таким образом, при категорно-функторном описании систем акцент переносится с "застывших", "мертвых" состояний объектов на различные формы их движений и преобразований. Предметом исследования становятся не столько состояния систем, сколько совокупности способов их преобразований (вспомним, что постоянное обновление, смена, преобразование составляющего субстрата – это существеннейшие черты практически всех естественных и антропных систем).

Две особенности теоретико-категорного описания систем позволяют думать, что язык теории категорий более адекватен реальности, нежели язык теории множеств. Первая особенность – возможность оперировать сразу всей совокупностью одинаково структурированных множеств, что позволяет отождествить эту совокупность с пространством всех возможных состояний системы. Вторая особенность – та, что в категорию наряду со структурированными объектами равноправно и обязательно входят все допустимые их структурой способы изменения объектов, т.е. преобразования состояний системы. Это позволяет заменить теоретико-множественное идеализированное представление Мира в виде "застывших" объектов на адекватное Миру представление его процессами.

Теоретико-категорный язык богаче языка теории множеств. Для одного и того же набора множеств – объектов категории – может существовать много различающихся наборов морфизмов, т.е. преобразований этих множеств. Но категории с одинаковыми объектами, но различающимися морфизмами – это различные категории: неразличимые как множества объекты в них – это различные по возможностям преобразований объекты.

2) Мир процессов – это мир времени. Согласно современным моделям, время – это свойство открытых систем. Описание меняющихся систем, строго говоря, не доступно теоретико-множественной математике, поскольку для этих систем в различные моменты времени не выполняется аксиома экстенсиональности, требующая, в частности, тождественности множества самому себе. Формально подобные проблемы решают введением отображений, расслоений и т.п. конструкций, в которых помимо самих открытых множеств фигурировало бы некое априорное абстрактное базовое множество, играющее роль "оси времени". Возможно, для более содержательного моделирования времени следует подумать об аксиоматическом введении особых "динамических множеств", примерами которых являются такие открытые к изменениям совокупности, как популяции организмов в биосфере, словари языков, совокупности мыслеобразов в человеческом сознании и т.п. Мой вариант формализации представлений о динамических множествах использует аксиоматику теории категорий и функторов [3, 16]. Класс объектов ObS категории S объединяет все потенциально возможные реализации некоторой математической структуры. И если объекты категории есть структурированные множества, то класс ObS формально не является множеством, но может быть назван *динамическим множеством*, так как удовлетворяет предъявленным мной выше интуитивным о нём представлениям. Таким образом, динамическое множество есть класс множеств – всех реализаций некоторой математической структуры, моделирующей изучаемую систему.

В попытках теоретико-множественного формального описания времени не хватает также средств для конструирования различных модусов существования: «временное» и «вневременное» бытие, «бренность» и «вечность» и т.п. В языке теории категорий эти средства существуют. Пространство состояний системы – класс объектов описывающей систему категории – содержит все потенциально возможные состояния системы. В реальности состояния системы альтернативны: истинность одного из них исключает "одновременную" истинность других. В этом смысле пространство состояний обладает "вневременными" свойствами: все состояния сосуществуют в нем (независимо от момента времени, в который они реализуются), а не альтернативны. Отмеченные "вневременные" свойства роднят его с понятием вечности, которая содержит в себе все возможные события "изменчивого" Мира.

3) Работа теоретика по формальному описанию объектов познания обычно состоит в подборе математической структуры, в какой-то степени изоморфной устройству предмета изучения или представлений о нем. Но всегда ли существует в математике подходящая структура? Именно при решении этого вопроса в предметных областях науки возникает тезис о необходимости «новой математики». Математические структуры задают набором аксиом, и при всем видимом многообразии аксиоматических систем число их типов ограничено: структуры порядка, топологические и алгебраические структуры [2].

Теоретико-категорное же описание систем не требует обязательной экспликации системы математической структурой. Возможно "качественное" категорное описание, т.е. непосредственное перечисление и описание состояний системы и всех переходов между ними (морфизмов) не на математическом, а на внутридисциплинарном содержательном языке (некоторым аналогом чего может служить, например, карта метаболических путей живой клетки). Замечу, что если задана математическая структура, то всегда возможно задать сохраняющие ее морфизмы. Необходимость обратного утверждения для приложений не обязательна: если заданы морфизмы, то может и не существовать математической структуры с известной аксиоматикой, которую они "сохраняют". Объекты "качественной категории" и будут реализацией соответствующей заданным морфизмам структуры.

4) Количественное описание – важная составляющая научного подхода. Методологический вопрос «Что такое количество?» различным образом решают на разных стадиях развития самой математики и ее приложений. Приведу пример задачи для решения которой, по-видимому, необходимо обобщение существующих представлений о количестве элементов в множествах. Поиск выделенных – реально осуществляющихся – состояний систем среди всех потенциально возможных состояний в методологии экстремальных принципов требует умения, во-первых, каким-либо образом упорядочить состояния между собой на шкале "больше-меньше", "сильнее-слабее" и т.п. и, во-вторых, – выбрать экстремальное из этих состояний в полученном упорядочении. На языке математических структур такой поиск означает умение упорядочить структурированные множества, описывающие систему, и выбрать

наиболее "сильную" (или наиболее "слабую") структуру в качестве той, что выделяет реализующееся в действительности состояние из всех возможных.

Если для бесструктурных множеств любые количественные характеристики являются производными от понятия «количество элементов», строго определенного в теории множеств, то аналог этого понятия для множеств со структурой не обладает необходимым для однозначного сравнения линейным упорядочением. Этот факт становится преградой в применении идеологии экстремальных принципов при описании сложных систем. И оказывается необходимым обобщение понятия «количество» для структурированных множеств. Такое обобщение дает метод функторного сравнения структур в теоретико-категорном описании систем [3].

Упомянутые выше общенаучные понятия «время», «количество» – не единственные, нуждающиеся в четкой экспликации при решении проблем научного знания. Теория категорий и функторов может помочь и в корректном использовании таких распространенных практически во всех областях знания понятий, как «информация» и «энтропия» [18].

5) Законы функционирования (они же – законы динамической изменчивости, уравнения обобщенного движения) сформулированы далеко не для всех объектов научных исследований. Методология поиска таких законов составляет важную проблему теоретического знания, не решенную до настоящего времени. В методах научного описания мира существует крайне ограниченный набор формальных способов вводить основные законы изменчивости исследуемых систем. Почти всегда такие законы постулируют или в форме «уравнений движения» или в форме экстремального принципа. Перед методологами науки стоит задача провести анализ современных подходов, позволяющий выделить индуктивно-постулативную и дедуктивно-дискурсивную составляющие знания и на основании проведенного анализа предложить подходы, позволяющие выводить, а не угадывать фундаментальные законы динамической изменчивости систем.

Выполнение подобной работы невозможно без формального аппарата, ориентированного не на одну предметную область исследований, а на широкий их спектр. Теория категорий и функторов, претендуя на роль фундамента в основаниях математики, может оказаться решающим звеном и при переходе от искусства к методу в практике поиска фундаментальных «уравнений движения» природных и антропных систем [16].

Умение сравнивать структурировнные множества на языке теории категорий позволяет: сформулировать на этом языке экстремальный принцип, рассчитывать (а не угадывать) соответствующие функционалы и применять обобщение вариационного формализма Джейнса для самого широкого круга задач моделирования [16, 17].

1. Л.Витгенштейн. Логико-философский трактат. 1921.
2. Н.Бурбаки. Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Мир, 1963. С. 245–259.
3. А.П.Левич. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии. М.: Из-во Моск. ун-та, 1982.
4. И.Иванов. Нужна ли физикам теория категорий? // http://elementy.ru/news/430819. 2008.
5. Eilenberg S., Mac Lane S. General theory of natural equivalence // Trans. Amer. Math.Soc. 1945. V. 58. P. 231-234.
6. Grothendieck A. Topos // Lect. Notes Math. 1972. V.269. P. 299-525.
7. Rashevsky N. Topology and Life. In search of general mathematical principles in biology and sociology // Bull. Math. Biophys. 1954. V. 16. P. 317-348.
8. Rosen R. A relational theory of biological systems // Bull. Math. Biophys. 1958. V.20. P. 245-260.
9. Bartholomay A.F. Molecular set theory. 11. An aspect of biomathematical theory of sets // Bull. Math. Biophys. 1965. V.27. P. 235-251.
10. Baianu I. Organismic supercategories and qualitative dynamics of systems // Bull. Math. Biophys. 1971 V.33. P. 339-354.
11. Lequizamon C.A. The periodic continuous effect in terms of the algebraic relation theory // Int. Journal of Biological Systems. V.1. No 1. 1993.
12. Arbib M. Categories of (M,R)- systems // Bull. Math. Biophys. 1966. V.28. P. 511-517.
13. Акчурин И.А. Единство естественнонаучного знания. М.: Наука. 1974.
14. Герловин И.Л. Основы теории взаимодействий в веществе. Л.: Энергоатомиздат. 1990. 432 с.
15. B.Coecke. Introducing categories to the practicing physicist // препринт arXiv: 0808.1032 (7 August 2008).
16. А.П.Левич. Поиск законов изменчивости как задача темпорологии // На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании. Часть 3. Методология. Физика. Биология. Математика. Теория систем. М.: Прогресс-Традиция, 2008. С. 403-431.
17. А.П.Левич. Структура экологических сообществ. М.: Из-во Моск. ун-та, 1982.

18. А.П.Левич. Энтропия как мера структурированности сложных систем // Время, хаос и математические проблемы. М.: Институт исследований сложных систем МГУ им. М.В.Ломоносова. Вып. 2. 2000. С. 163–176.