Математика и физика пространственно-временного континуума

С. А. Векшенов

Российская академия образования

Введение

Как известно, наше понимание физического мира в значительной степени детерминировано принятой точкой зрения на пространство и время. Современный взгляд на эти категории сформировался в начале XX века как синтез идей релятивизма и теории множеств. Суть этого синтеза в общих чертах состояла в следующем.

На условный момент создания теории относительности в 1905 г. (как известно, это был длительный процесс, в котором участвовало не менее десятка человек, включая Г.А.Лоренца, А.Пуанкаре, А. Эйнштейна и др.) в физике было две самодостаточные теории: механика И. Ньютона и электродинамика К. Максвелла. Эта ситуация «двух хозяек на одной кухне» с точки зрения существующей тогда философии была совершенно неприемлемой. Принципиальным моментом этой коллизии было взаимоотношение двух универсальностей: пространства и времени из механики и эфира из электродинамики. В принципе были возможны два варианта их объединения: на основе пространства-времени или эфира. Выбор из этих двух возможностей должна была сделать математика. К этому времени уже вполне оформилась теоретико-множественная точечная модель континуума, которая и была взята за основу объединенной теории. Ее первичным понятием явилось понятие «события» - точки в едином пространственно-временном континууме. Концепция эфира была представлена в этой модели аксиомой постоянства скорости света, которая через метрику была «подсоединена» к аксиомам пространства. В результате получилось некое синтетическое образование, которое было названо «пространством Минковского». Сама же методология соединения разнородных сущностей на основе аксиом была впоследствии превращена Н.Бурбаки в универсальную методологию познания.

Все остальные моменты построения: принцип относительности, эксперимент Майкельсона-Морли и пр. имели значение для создателей теории, но не для самой теории (это, в частности, подчеркивал и В.А.Фок).

Разумеется, после этого все модели эфира были отброшены, и основной ареной физики стало точечное псевдоевклидово, а позднее и псевдориманово пространство-время.

Подобный поворот событий дал повод отождествить единую категорию пространства-времени с «геометрией», которая, в свою очередь, определялась набором аксиом для множества точек-событий.

Традиционно выделяются следующие основные классы аксиом:

- аксиомы упорядоченности,
- метрические аксиомы,
- топологические аксиомы, включающие аксиому размерности,
- аксиомы допустимых координатных систем,
- арифметические аксиомы, с особым вниманием к аксиоме Архимеда.

Эти классы аксиом можно рассматривать как своеобразные «параметры» пространства-времени. Варьируя «значениями» этих параметров, а также вводя дополнительные аксиомы, можно получить множество разнообразных «геометрий», а следовательно, многообразие моделей пространства-времени. Это значит, что, изменяя набор аксиом можно в принципе «настраивать» свое интеллектуальное зрение на осмысление физической реальности.

Последовательная реализация этой мысли составляет содержание фундаментальной концепции «геометрофизики», которая в XX веке получила значительное развитие. С максимальной полнотой эта концепция представлена в одноименной монографии Ю.С.Владимирова [1].

Вместе с тем в этой концепции имеется ряд существенных проблем. Например, возникающие в квантовой теории поля расходимости непосредственно связаны с точечной структурой пространственно-временного континуума. С другой стороны, точечная структура континуума описывается действительными числами, в то время как физика микромира оперирует числами комплексными (точнее амплитудами вероятности). К названным проблемам можно добавить также апории Зенона, из которых следует невозможность адекватного описания движения в точечном континууме.

Достаточно очевидно, что эти проблемы имеют «не физический» характер. Пространство-время мыслится точечным, теоретико-множественным континуумом, который и является ответственным за возникновение обрисованных выше проблем. Иными словами, проблема заключается в самом абстрактном понятии «точки». Это значит, в частности, что «геометрия» не дает полной картины пространственно-временного континуума. Аксиомы всегда подразумевают существование некого носителя, который a priori полагается множеством (точек).

Как уже отмечалось, многообразие моделей пространства-времени основано на «параметризации» систем аксиом. При этом носитель аксиом множество остается некой «константой». Расширяя концепцию геометрофизики, можно предположить, что характер физической реальности детерминируется не только аксиомами, но и свойствами их носителя. Подвергая вариации носитель, мы получаем возможность расширить наше представление о реальном мире.

Эта естественная мысль сталкивается с проблемой, что современная математика в целом игнорирует объекты, которые радикально не вписываются в теоретико-множественную концепцию. В этом плане поиск альтернативы множеству, как носителю геометрии выливается в проблему переосмысления теории множеств в целом и теории континуума в частности.

Континуум, как и геометрия, является одним из фундаментальных компонентов нашей интуиции. Как и в случае геометрии, модель континуума определяет границы и способы познания реальности. Принятая современной математикой точечная модель континуума является исключительно эффективной в техническом плане, но крайне проблемной в отношении логики (континуум-гипотеза) и с точки зрения упомянутых физических интерпретаций. Тем не менее и математика, и теоретическая физика продолжает придерживаться этой модели в силу ее неоспоримых технических достоинств. К сожалению, эти достоинства практически полностью заслонили саму первоначальную интуицию непрерывного, и точечный континуум видится едва ли не единственной его моделью.

Чтобы не оставаться в тени этой иллюзии воспроизведем (как правило, с помощью пространных цитат) ряд классических ключевых идей, которые составляют полноценную альтернативу теоретико-множественной модели континуума, в частности, континуума пространства-времени.

1.

Понятие непрерывного возникло из необходимости отобразить в мышлении феномен движения. Возникшие при этом проблемы оставили след на всех дальнейших теоретических конструкциях, связанных с идеей непрерывного. Обычно их связывают с именем Зенона Элейского, который в четырех дошедших до нас «апориях», доказывает, что движение не может быть мыслимо без внутреннего противоречия.

Рассмотрим аргументы Зенона на примере апории «Ахиллес». Поскольку содержание этой апории хорошо известно, перейдем сразу к ее анализу.

Рассмотрим отрезок [0,1]. Зенон утверждает, что исчерпать отрезок длиной 1 путем его бесконечного деления невозможно, т.е. $1 \neq \sum(1/2)^n$. Это действительно так, если оставаться в рамках потенциальной бесконечности. Если же перейти к бесконечности актуальной, то апория должна исчезнуть, поскольку $\sum(1/2)^n = 1$ (*).

Однако остается существенная проблема. Члены рассматриваемой последовательности занумеровны натуральными числами, более того - порядковыми натуральными числами, коль скоро речь идет о представлении движения. Последовательность порядковых чисел не завершается даже в том случае, когда завершается та же самая последовательность количественных чисел. Это значит, что в формуле (*) опять возникает потенциальная бесконечность и апория Зенона восстанавливается, поскольку левая часть этой формулы - постоянная величина, а правая - неограниченный процесс.

Эта ситуация была вполне осознана еще в 30-х годах прошлого века, хотя и без явного упоминания о порядковой бесконечности. В знаменитой монографии «Основания математики» Д.Гильберт и П.Бернайс по поводу парадокса Зенона сделали в высшей степени интересное замечание. «Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждениями о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы даже и в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться…»

Примечательно и предлагаемое ими решение проблемы.

«В действительности, конечно, существует более радикальное решение этого парадокса. Ведь на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математические пространственно-временные представления о движение являются также физически осмысленными и в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас имеются все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области в пределах того порядка величин, которые еще доступны нашему наблюдению, подобно тому как совершает определенную экстраполяцию механика сплошной среды, которая кладет в основу своих рассмотрений представление о непрерывном заполнении пространства материей. Подобно тому как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение. Если мы встанем на эту точку зрения, то этот парадокс исчезает» ([2], стр. 40-41).

Фактически, Гильберт и Бернайс утверждают, что континуум ни в каком случае не может быть адекватно представлен множеством точек, иначе возникают парадоксы, аналогичные апориям Зенона.

Такой взгляд на континуум приближается к взглядам Аристотеля, который понимал непрерывность как то, что делится на части, всегда в свою очередь делимые. Это означает, что в непрерывном нет неделимых частей и его нельзя сложить из этих частей. С этой точки зрения, окружность, например, нельзя мыслить состоящую из точек, поскольку точка есть «то, что не имеет частей». Существенным является тот факт, что вместе с понятием непрерывного Аристотель рассматривает понятие неделимого. Неделимое, с одной стороны, противопоставляется непрерывному. С другой стороны, только с помощью неделимых непрерывное обретает форму и может быть познано как нечто определенное.

Вполне конструктивную форму такой двойственный континуум приобрел у Г.В.Лейбница. Более того, он создал целую метафизику, центральным понятием которой была именно некая динамичечкая целостность. Лейбниц назвал эту целостность монадой и выделил ее основные свойства, например:

«1. Монада есть простая субстанция, которая входит в состав сложных; простая, значит не имеющая частей…

10. Я принимаю также за бесспорную истину, что всякое сотворенное бытие а, следовательно, и сотворенная монада - подвержена изменению и даже что это изменение в каждой монаде беспрерывно.

11. Из сейчас сказанного следует, что естественные изменения монад исходят из внутреннего принципа, так как внешняя причина не может иметь влияния внутри монады» [3].

Коротко, монады - это неделимые, обладающие собственным внутренним самодвижением. В этом монады принципиально отличаются от точек. В математике и естественных науках монады хорошо известны под именем «бесконечно-малых величин». В отношении этих величин позиция Лейбница заключалась в следующем. «Если кто-то не желает рассматривать бесконечно-малые и бесконечно-большие как реально существующие, он может пользоваться ими как «идеальными понятиями», которые сокращают рассуждения подобно мнимым корням в обычном анализе (вроде, например $\sqrt{-2}$)... Таким же образом представляют более трех измерений...- все это для установления идей, способных сокращать рассуждения и основывающихся на реальностях» (цитировано по книге [4], стр. 262).

Бесконечно-малые величины очень хорошо отражали двойственность континуума, о которой речь шла выше. Однако наследующие Лейбницу поколения математиков и, особенно, физиков воспринимало величины dx и dy отнюдь не как бесконечно-малые переменные величины (хотя на экзамене надо было отвечать ровно так), а как некоторые, хотя и очень малые, но все же величины постоянные.

Тем не менее, бесконечно-малые величины после создания теории пределов стали считаться фикцией, затемняющей ясную картину анализа. Но в 1961 А.Робинсон показал, что этому понятию можно придать точный смысл, и построить анализ, названный «нестандартным» (более точно, это «неархимедов анализ», т.е. математический анализ, использующий числа, для которых несправедлива аксиома Архимеда: если $x < y$, то $\exists$ n, такое, что $xn > y$). В этом анализе бесконечно-малые уже являются постоянными числами, хотя и с довольно необычными свойствами [4].

Создание теории множеств, а вместе с ней и точечной модели континуума, дало в руки математиков исключительно мощную и эффективную конструкцию. К сожалению, ее отношение к реальности оказалось в высшей степени проблематичным. Исключительно ярко и эмоционально суть проблемы описал Г.Вейль в блестящем эссе «Das Kontinuum».

В качестве наиболее фундаментального континуума, непосредственно данного созерцанию, Вейль справедливо называет *время*. Чтобы строго установить связь этого континуума с математическими понятиями, прежде всего с понятием числа необходимо установить в этом континууме строго точечную констатацию моментов времени «теперь». Тогда можно ввести отношение порядка: что будет «раньше», что «позже». Далее два момента времени можно соединить отрезком, выяснить условия равенства отрезков и т.д. Все это является по Вейлю построением математической теории времени.

Дальше Вейль ставит вопрос таким образом: «Если моменты времени с их отношением «раньше» и «позже» могут действительно служить фундаментом чистой теории времени, то в созерцании времени должен быть заложен ответ на вопрос: имеется ли такого рода соответствие между моментами времени и действительными числами или нет? Если оно отсутствует, то следует попытаться так расширить или изменить наши дефинициональные принципы, чтобы достигнуть желаемого согласия. Если же это окажется недостижимым, то чисто арифметический анализ лишается реальной ценности, и учение о континууме придется рассматривать как нечто самостоятельное и стоящее на одной ступени с учением о числе. . . » Ответ на этот вопрос, с точки зрения Вейля, очевиден: «Фундаментом математической теории может быть, по-видимому, натуральное число (Вейль старается не прибегать к понятию множества - примечание С.В.), но не континуум, поскольку ему не хватает опоры в наглядном созерцании. Заслугой философии Бергсона следует считать подчеркивание глубокого отчуждения мира математических понятий от непосредственно переживаемого феноменологического времени («la durêe»). . .

Например, если я воспринимаю свет в течение короткого интервала времени, то в момент времени A я обладаю переживанием не только этого восприятия, но и теми воспоминаниями, которые «о» переживаемых восприятиях во все прошлые моменты времени. . . непрерывное восприятие . . . бесконечно много вложенных друг в друга и взаимосвязных систем бесконечно многих воспоминаний (в литературе это называется «потоком сознания», - прим. С.В.). . . Представление о потоке, как о состоящим из отдельных точек и поэтому *распадающемся* на эти точки, оказывается ошибочным. От нас ускользает то, что составляет непрерывность, переливание от точки к точке. . .

Для объективного представления времени получается вот что: 1) отдельная временная точка не является самостоятельной; 2) каждый момент времени непредсказуем, возможна лишь приближенная фиксация.»

И далее: «Не от нашей воли зависит, что мы не можем связать непрерывность с системой целых чисел. И все же, кто знает, что еще дремлет в лоне физики будущего - квантовой теории!»[5]. Напомним, что книга Вейля была написана в 1917 г.

В последние десятилетия канторовская теория множеств подвергается все более жесткой критике. Одновременно делаются попытки построить некую «альтернативную теорию множеств», в которой понятие «множества» вводится не столь прямолинейно, как в теории Кантора. Одной из интересных попыток в этом направлении была предпринята выдающимся чешским математиком и логиком П.Вопенкой (он независимо от П.Коэна решил континуум-проблему, но его публикация появилась несколько позже).

Основным мотивом альтернативной теории множеств является построение теории, в которй феномен бесконечности согласуется с опытом. С точки зрения этой теории бесконечность встречается при наблюдении очень больших, необозримых множеств. Актуальная бесконечность, на которой базируется канторовская теория, не рассматривается. Аналогичный «естественнонаучный» подход к бесконечности, при котором понятие актуальной бесконечности заменялось понятием «неосуществимости», был предложен еще в 50-х годах А.С.Есениным-Вольпиным. В альтернативной теории множеств бесконечность вводится с помощью т.н. «полумножества». Лучше всего это понятие проиллюстрировать конкретным примером. Возьмем свойство «быть любимым человеком». С точки зрения традиционной теории множеств можно вполне образовать множество любимых (кем-то) людей. С другой стороны, подобную совокупность невозможно образовать, поскольку нет четкой границы между «еще не любимым» и «уже не любимым». Совокупность, которая учитывает не только наличие элемента, но и его качества, является полумножеством.

В этой концепции феномен непрерывности возникает тогда, когда мы наблюдаем множество, но не в состоянии идентифицировать (различить) его индивидуальные элементы. Например, когда мы наблюдаем кучу песка с большого расстояния, она представляется нам непрерывной.

Если отвлечься от методологических установок альтернативной теории множеств (которые удивительно напоминают борьбу за «наблюдаемость» в физике), идея непрерывности и, соответственно, бесконечности как неразличимости является новым моментом, по сравнению с аристотелевской и канторовой традицией.

Приведенный краткий обзор еще раз подчеркивает, что точечная модель является далеко не единственной моделью континуума. При этом она является такой моделью, которая, в целом, не адекватно передает интуицию непрерывного. Более того, можно сказать, что теория точечного континуума, созданная Георгом Кантором, в значительной мере отражает его собственные устремления, но отнюдь не реальное положение дел (об этом, ссылаясь на личный разговор с Кантором, говорил еще Ф. Клейн). Убедительность концепции динамического континуума, напротив, отчаянные попытки определить место точечного континуума на кардинальной шкале (континуум-проблема) говорят о том, что Аристотель и Лейбниц были ближе к существу дела, чем Кантор.

2.

Сила теории точечного континуума в детально разработанном и адекватном его идеологии математическом аппарате. Для развития неканторовской теории континуума также необходимо создание соответствующего ее устремлениям формализованного аппарата.

В данном разделе сформулированы основные положения теории, которая может быть положена в основу математики неканторовского континуума.

Фундаментом математики и ее приложения является учение о числе. Любое натуральное число двойственно - одно является одновременно и количественным, и порядковым. При этом по старой философской традиции «количество» замкнуто на пространство, «порядок» - на время. Как расставлять приоритеты - зависит от точки зрения, но связь этих категорий является очень тесной.

Несмотря на факт такой двойственности, современная математика понимает число исключительно в количественном аспекте. Причину этого можно усмотреть в следующем.

2.1. В 30-х годах XIX века 20-летний гений Эварист Галуа в достаточно явной форме сформулировал новую парадигму познания математических структур посредством изучения их групп автоморфизмов. Но современная ему математика только начала осваивать структуры. Идеи процесса и его предела, привнесенные анализом, в то время, несомненно, доминировали.

Развитие парадигмы Галуа требовало прижать математике структурный характер. Для этого необходимо было, прежде всего «подавить» все проявления процесса. Для такого разворота были и свои резоны: объект непознаваем, коль скоро он находится в движении, в становлении.

Нужна статическая «идея» этого объекта. Проводником такой платоновской (а точнее неоплатоновской) переделки математики явилась теория множеств. Ее основной методологический шаг почти тривиален: если процесс состоит из точек, а к этому подталкивает, например, понятие «скорости в точке», то, собрав вместе все точки, мы и получим «идею» процесса, т.е. некоторое множество.

Множество имеет кардинальное число и может быть наделено структурой. Кардинальное число - это количество элементов, быть может, бесконечное, оно является обобщением *количественной составляющей* натурального числа. С другой стороны, процесс «отпечатывается» на множестве в виде следа, образуя некоторую структуру. Простейший пример - упорядоченное множество - след времени как параметра процесса. Появление теоретико-множественных структур позволяет уже реализовать идею Галуа. Круг замкнулся.

Приведенная схема, со всеми ее обобщениями, модификациями и обратными ходами, образует основную идеологическую конструкцию современной математики - ее количественный взгляд на окружающий Мир. Именно эта идеология определяет линию применения математики в других дисциплинах. Яркий пример - пространство Минковского, - состоящего из множества точек-событий, наделенных структурой группы Лоренца.

Теория множеств - универсальная теория количеств. Все, что количеством *не является*, определяется в ней через количество. Например, порядковое число «7» - это множество, состоящее из семи *упорядоченных* элементов. В таком множестве действует своеобразная «машина времени»: можно свободно перейти от «1» к «7» и от «7» к «1». Идею необратимости времени эта конструкция, разумеется, никак не отражает.

Примером более жесткого подавления процесса является т.н. «диагональный метод» Кантора. Его суть заключается в том, что собранные вместе элементы множества М могут в определенной ситуации породить новый элемент М. Разумеется, это в чистом виде *внутренний процесс.* Но теория множеств не признает процессов и просто говорит, что множество M имеет большую мощность, чем предполагалось a priori.

Подобные «приручения» процесса и самого времени достаточно долго импонировали человеку внушением, что он является «мерилом всех вещей». Примечательно, что еще Э. Шредингер заметил, что публичный успех специальной теории относительности связан именно с такой возможностью «приручения» времени.

Реальные *математические* процессы в теоретико-множественной концепции были вынуждены вести катакомбное существование, заявляя о себе через фундаментальные принципы, ограничивающие притязания разнообразных формализмов. Принципы дополнительности, неопределенности, вкупе с теоремой Геделя о неполноте, составившие методологический фундамент науки XX века - это прорвавшиеся на поверхность свидетельства об ограниченности теоретико-множественного, количественного взгляда на вещи.

Теория множеств - великая концепция, достижения и ограничения которой на сегодняшний день совершенно ясны. Более того, платоновские мотивы этой концепции по-прежнему значимы. Попытки Брауэра и конструктивистов вернуться к процессу - потенциальной бесконечности как альтернативе бесконечности актуальной - являются попытками посмотреть на проблему снизу вверх, что, разумеется, не приближает нас к ее решению.

Можно сказать, что на сегодняшний день определились две ясные позиции:

- идея анализа структур посредством выявления их внутренних симметрий («парадигма Галуа») по- прежнему сильна и привлекательна не только в математике, но и в ее приложениях;
- теоретико-множественный способ образования структур, заставляющий глядеть на Мир только через призму количества, идейно и технически себя исчерпал.

2.2. Преодоление этой несвязности возможно только на основе замены теоретико-множественной концепции новой теорией, в которой будут фигурировать структуры с принципиально иной, не теоретико-множественной основой. Никаких искусственных построений при этом делать не придется - достаточно вспомнить, что теория множеств выросла из постулата, что натуральное число тождественно его количественной составляющей: n = n_R . Тогда первый шаг на пути к новой теории вполне очевиден: необходимо считать натуральное число «нераздельным и неслиянным» *единством количества и порядка,* n = (n_R , n_Z). В дальнейшем будем называть это положение аксиомой двойственности.

Следующий шаг уже не так тривиален. В логике аксиомы двойственности необходимо образовать два принципиально различных типа бесконечностей - количественную и порядковую - причем бесконечностей завершенных, актуальных. В отношении количественной бесконечности вопрос решается просто - это знакомая нам теоретико-множественная бесконечность. Что касается бесконечности порядка, то здесь надо искать существенно иные подходы.

В действительности, решение можно предугадать.

Если есть процесс γ, то существует, по крайней мере, два способа превратить его в объект, в «идею» процесса. Во-первых, собрать его шаги в одно целое. Это теоретико-множественное, количественное решение. Второй способ состоит в том, чтобы замкнуть процесс на себя. Результат такого замыкания можно также рассматривать как новую «идею» процесса (в платоновском смысле). Если сам процесс неограничен, то эти «идеи» - объекты можно рассматривать как различные типы бесконечностей.

Последний шаг состоит в осмыслении носителей этих бесконечностей. В случае количественной бесконечности, это конечно, множество, которое еще сам Кантор отождествлял с греческим ($\alpha\varphi\omega\rho\delta\mu\varepsilon\nu\alpha\varepsilon$). Что же касается бесконечности порядковой, то ее носителем становится *новая для математики сущность*, которую можно назвать «фундаментальным вращением». Понятие фундаментального вращения отражает интуицию «неподвижного времени», ($\alpha\iota\omega\nu$), которая хорошо известна из богословских текстов Максима Исповедника и других авторов. Примечательно, что и Г.Кантор при построении теории множеств опирался на труды бл. Августина и Н.Кузанского.

Именно фундаментальное вращение позволяет математике «открыть второй глаз» и посмотреть на Мир с точки зрения порядка.

Имеет смысл, хотя бы в общих чертах представить ту картину, которая нас ожидает.

Если говорить образами, то переход от теоретико-множественной к «порядковой» картине Мира подобен изобретению кинематографа. Отдельные «кадры» - элементы множеств соединяются в полноценный «фильм», который становится самостоятельной сущностью. В теоретико-множественном мире можно «углядеть» довольно много «разрезанных» на отдельные элементы процессов. При этом очевидно, что применение алгебраических методов в русле «парадигмы Галуа» никак не ущемляется тем, что областью их применения окажутся динамические структуры. С другой стороны, многие алгебраические конструкции могут претерпеть трансформацию. Например, в циклических группах можно увидеть «разрезанное» множеством фундаментальное вращение. Выявление таких «разрезанных» процессов - первый шаг к развертыванию порядковой картины.

В этом месте, по-видимому, стоит прекратить свободное изложение и перейти к формализованным конструкциям.

2.3. Как видно из предыдущего текста, центральной проблемой является порядковая бесконечность. Очевидно, что характерные для теории Кантора способы введения бесконечности - либо путем собирания в одно целое элементов неограниченного множества, либо переходом к множеству степени - неприемлемы для построения порядковой бесконечности. Однако существует иной способ введения новых объектов - аксиоматический. Выделив характеристическое свойство, можно определить новый объект как «нечто» этому свойству удовлетворяющее. Что касается характеристического свойства бесконечного, то рассмотрим сначала простой пример.

Предположим, мы наблюдаем за человеком, который неизменным шагом идет к горизонту. Степень удаленности горизонта от нашего взора может быть охарактеризована степенью неразличимости отдельных предметов: сначала мы перестаем различать пуговицы на пальто, затем черты лица и т.д. Для того, чтобы полностью слиться с горизонтом, человек должен сделать бесконечное число шагов. Таким образом, неразличимость можно считать ключевым свойством бесконечности.

Следует отметить, что понятие «горизонта» не просто удачный образ, но и математическое понятие, которые ввел П. Вопенка в качестве основного инструмента построения «Альтернативной теории множеств». В этой теории бесконечность трактуется как проявление нечеткости при подходе к горизонту. При этом Вопенка понимал бесконечность опять-таки в канторовском, количественном смысле.

Наше понятие «горизонта» близко к понятию горизонта Вопенки, хотя взгляды на сущность бесконечного кардинально отличаются от его представлений.

Формальное определение бесконечного в «аксиоматической» трактовке выглядит следующим образом.

Определение. Рассмотрим какой-нибудь *неограниченный*, с постоянным шагом процесс μ , в котором объекты различимы данным предикатом A. Определим объект α , на котором стабилизируется процесс в смысле предиката A. Если все объекты являются *конечными*, то объект α можно считать *бесконечным относительно предиката* A (релятивизация бесконечности).

В применении к натуральному ряду данное определение работает следующим образом. Согласно аксиоме двойственности, n=(n_R , n_Z). Будем отражать *процесс* перехода от одного порядкового компонента n_Z к другому порядковому компоненту m_Z предикатом $=_Z$. С другой стороны на натуральных числах можно ввести предикат $=_R$, который фиксирует их количественное различие. В этом случае можно образовать два бесконечных числа ω и Ω, на которых натуральный ряд стабилизируется в смысле количества и порядка соответственно, т.е. $\omega+1 =_R\omega$, но $\omega+1\neq_Z\omega$. С другой стороны, $\Omega+1 =_Z\Omega$, что влечет $\Omega+1 =_Z\Omega$. С разной степенью наглядности данный процесс можно изобразить следующим образом (рис. 1):

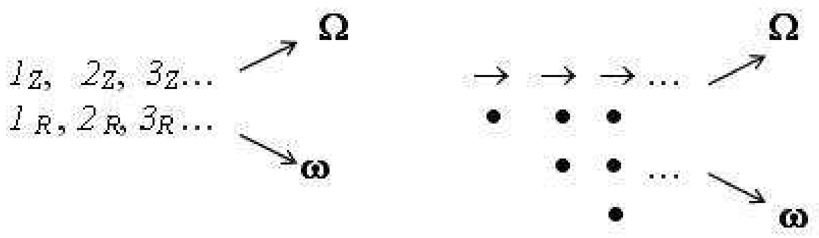

Рис. 1.

Очевидно также, что ω-1 $=_R\omega$, и Ω-1 $=_Z\Omega$.

Числа ω и Ω были определены с помощью формальной конструкции. Следующим шагом является их интерпретация.

Ясно, что бесконечное число ω может быть интерпретировано как первый бесконечный ординал, т.е. теоретико-множественным образом.

Для бесконечного числа Ω необходимо иное понимание. Во-первых, очевидно, что Ω не может быть множеством. Действительно, порядок Ω в области множеств должен совпадать с порядковым типом (принцип соответствия). Однако в силу неограниченности шкалы порядковых типов (ординалов), Ω допускает увеличение в смысле порядка, что противоречит его определению. Далее, соотношение $\Omega\pm1=_Z\Omega$ можно рассматривать как своеобразное проявление «периодичности» относительно «кванта времени» «1» = «$\rightarrow$». Поскольку вне теоретико-множественного универсума все «$\rightarrow$» сливаются, Ω становится числом с *внутренней циркуляцией времени* или *фундаментальным вращением.* В этом утверждении нет ничего необычного, поскольку последовательное, «линейное» движение является внутренним свойством действительного числа.

Фундаментальное вращение не обладает никакими физическими характеристиками: осью вращения, частотой и пр., ровно так же, как и последовательность «внутри» действительного числа не является физическим процессом.

Содержательная теория не может ограничиться введение только бесконечных чисел ω и Ω. Необходимо иметь целые шкалы бесконечных количественных и порядковых чисел. Для каждого типа чисел принципы построения этих шкал существенно различны. Основой шкалы количественных бесконечных чисел является соотношение $\omega+1 \neq_Z \omega$. Оно позволяет образовать числа: $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$..., которые можно «свернуть» в число 2ω. Снова можно начать процесс счета: $2\omega\ +1$, $2\omega\ +2$, $2\omega\ +3$ $\ldots$ и образовать число 3ω и т.д. Среди этих чисел-множеств можно выделить неравномощные множества и получить линейно-упорядоченное расширение натурального ряда в область бесконечных количеств:

$$0, 1, 2 \ldots n, ...\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2...\aleph_\lambda...$$

Для порядковых чисел данный способ неприемлем, поскольку $\Omega+1$ $=_Z\Omega$ и $\Omega+1\ =_R\Omega$. Для построения шкалы бесконечных порядковых чисел воспользуемся соотношением $\Omega\pm1\ =_R\Omega$. Введем двухбуквенный алфавит «+,-», где «+» и «-» означают противоположные направления вращения, и рассмотрим всевозможные неограниченные последовательности из «+» и «-», т.е. неограниченные слова в этом алфавите. Определим бесконечные порядковые числа: $\boldsymbol{P}_\gamma\ =\ <\Omega|(+...-)_\gamma>$, -$<\Omega|(-...+)_\gamma>$,где $(+...-)_\gamma$ и $(+...-)_\gamma$ - неограниченные по длине слова с γ перемен знака (перемен направления вращения).

Шкала бесконечных порядковых чисел, в отличие от шкалы количественных чисел является только частично упорядоченной. С другой стороны структура этой шкалы - совокупность неограниченных последовательностей «0» и «1» хорошо изучена теорией множеств. В частности, на ней можно ввести структуру булевой алгебры и разумным способом (согласованным с интуитивными представлениями о вращении) ввести алгебраические операции.

Бесконечные порядковые числа представляют собой фундаментальное вращение, наделенное внутренней структурой. Эти числа можно рассматривать как *обобщение вещественных чисел в плане расширения внутренней динамики вещественного числа* (от «линейного» движения до вращения). В такое расширение попадают, в частности, комплексные числа и кватернионы, если рассматривать их с точки динамики, т.е. вращения. В этом смысле динамический подход к расширению совокупности вещественных чисел оказывается более сильным, чем подход алгебраический (поиск более широкого поля с приемлемыми алгебраическими операциями).

В дальнейшем мы будем строить нашу теорию именно как теорию сверхвещественных чисел (сверхчисел), а не как теорию фундаментальных вращений, хотя такая аналогия с теорий множеств напрашивается сама собой.

Теория сверхчисел внешне напоминает нестандартный анализ, в котором наряду со «стандарнтыми» вещественными числами присутствуют «нестандартные» - «бесконечно-малые» числа. Следуя традициям теоретико-множественной концепции, нестандартный анализ трактует эти «бесконечно-малые» как некие постоянные величины, которые не удовлетворяют аксиомам Архимеда. Таким образом, «динамика» нестандартного анализа оказывается фиктивной.

2.4. Первые шаги теории сверхчисел заключаются в следующем:

1. найти соотношение между бесконечными количественными и порядковыми числами: $\aleph_\lambda$ и $\boldsymbol{P}_\gamma$;

2. выделить объекты, которые можно соотнести со сверхчислами;

3. понять, каким из физическим величин целесообразно придать значение из области сверхчисел.

Рассмотрим первую из названных задач. Вернемся к кардинальной шкале:

$$0, 1, 2 \dots n, \quad \dots \quad \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \quad \dots \quad \aleph_\lambda \quad \dots \quad (*)$$

Она неограничена, и завершить ее в рамках теории множеств невозможно (парадокс Бурали-Форти). Такая ситуация во всех существенных чертах воспроизводит парадокс несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, что в свое время послужило источником введения иррациональностей. Действительно, последовательность: 1; 1,4; 1,41; ... (**) ничем принципиально не отличается от последовательности (*). Для завершения последовательности (**) числом $\sqrt{2}$ потребовалось преодолеть horror infinity (страх бесконечного). Точно так же для завершения последовательности (*) необходимо преодолеть «страх сверхбесконечного», т.е. бесконечности Ω более высокого уровня по сравнению с количественной бесконечностью.

Ситуация становится более понятной, если принять во внимание следующие соображения.

Легко видеть, что всякое кардинальное число $\aleph_\lambda$, являясь *бесконечным* в смысле количества, является *конечным* в смысле порядка. В частности, $\aleph_\lambda+1\neq\aleph_\lambda$ в порядковом смысле, т.е. кардинал $\aleph_\lambda$ «ведет себя» также, как и любое конечное натуральное число. Иными словами, в порядком смысле последовательность (*) и последовательность: 0, 1, 2... n, .. эквивалентны. Это значит, что последовательность (*) также стабилизируется на числе Ω.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *$\Omega>\omega$ и для любого кардинала $\aleph_\lambda$, $\Omega>\aleph_\lambda$.*

Доказательство. Поскольку каждый кардинал $\aleph_\lambda$ одновременно является порядковым числом, $\Omega>\aleph_\lambda$.

Примечание. Неравенство $\Omega>\aleph_\lambda$ является полным аналогом неравенства $\omega>$k . Смысл последнего неравенства состоял в том, что шаг ω так велик, что он больше всех конечных шагов.

В свободном толковании сформулированная теорема означает, что *порядковых чисел больше чем количественных.* Принимая во внимание уже упомянутые философские традиции связывать количество с пространством, а бесконечность со временем, можно заключить, что *бесконечность пространства меньше чем бесконечность времени.* Подобные утверждения не отличаются точностью, но дают повод для развития многих плодотворных образов (так теорема Геделя о невозможности установления непротиворечивости системы ее внутренними средствами породила много глубоких вещей, хотя, строго говоря, утверждает несколько иной факт).

Из всего вышесказанного можно заключить, что числа $\boldsymbol{P}_\mu$ относятся к числам $\aleph_\lambda$ *как конечные количественные числа относятся к бесконечным количествам.* Это также дает основание также считать числа $\boldsymbol{P}_\mu$ обобщением вещественных чисел в той же степени, как и действительные числа можно считать обобщением рациональных чисел (вещественные числа определяют «линейную часть» вращения, так же как рациональные числа определяют конечный фрагмент неограниченной последовательности).

Сверхчисла, как и вещественные числа, являются трансцендентными объектами. Однако, как и вещественные числа, они допускают понятную интерпретацию. Традиционно говорят о геометрической интерпретации вещественного числа как точки на прямой. Строго говоря, эта интерпретации имеет место только в рамках теоретико-множественной концепции, когда процесс порождения вещественного числа, как это казалось создателям теории множеств, можно «остановить» Сходную псевдогеометрическую интерпретацию можно предложить и для сверхчисел.

Возьмем неограниченное произведение экспонент: $e^{i\varphi}e^{i\chi}e^{i\rho}e^{i\tau}$..., аргументы которых заключены в интервале $(0{,}2\pi)$ и которые можно понимать как неограниченную последовательность оборотов некоторого вращения. Геометрическим образом названного произведения является бесконечномерный тор T^{∞} . В этом случае сверхчисло $\boldsymbol{P}_{\gamma} = <\Omega|(+...-)_{\gamma}>$ можно представить как обмотку тора T^{∞}. Если в структуре сверхчисла можно выделить период длины k, то число можно представить обмоткой конечномерного тора T^{k}. Например, сверхчисло $\boldsymbol{P}_2 = <\Omega|$+- +-+-..> можно представить через геодезические поверхности тора T^2 (круги Виларсо). Как известно, с помощью кругов Виларсо можно описать геометрию спина. Это свидетельствует о том, что сверхчисло $\boldsymbol{P}_2$ имеет к этому физическому понятию самое непосредственное отношение. Мы убедимся в этом, рассмотрев вторую из названных задач.

2.5. После введения сверхвещественных чисел следующим шагом возникает вопрос: какие объекты можно соотнести с этими числами. Как известно, теория множеств решает аналогичный вопрос весьма прямолинейно - объявляет все объекты множествами и, следовательно, заведомо имеющими какое- либо кардинальное число. Наши дальнейшие действия далеки от этой максималистской программы. Тем не менее мы попытаемся увидеть сверхчисла - фундаментальные вращения в самых важных математических объектах, в частности, в натуральных числах.

Общий ход рассуждений позволяющий увидеть в числе фундаментальное вращение состоит в следующем. Как уже подчеркивалось, арифметический постулат, лежащий в основе теории множеств, утверждает, что число - это, прежде всего, мера количества, т.е. n $= n_R$. Иными словами, каждое число n можно представить в виде n различимых элементов: n $= (\bullet_1 \bullet \bullet .... \bullet \bullet \bullet_n)$. Развертывание этого постулата в конечном итоге и приводит к необходимости введения универсального понятия множества.

Принятие данного постулата с необходимостью подразумевает построение некоторой модели времени, т.е. представление порядковой составляющей натурального числа через количественную составляющую.

В арифметике эта проблема решается неявным принятием утверждения: «Что больше, то и дальше» Это значит, что n_Z определяется как число элементов последовательности: $(\bullet) \to (\bullet\bullet) \to ... \to (\bullet\bullet\bullet ... \bullet\bullet\bullet)_n$, то есть $n_Z = n_R$.

С другой стороны, при фиксированном количестве n_R возможны и другие последовательности. Решение этой проблемы в рамках теории множеств сводится к следующему.

Возьмем, например, числа $1 = (\bullet)$, $2 = (\bullet\bullet)$, $3 = (\bullet\bullet\bullet)$ и всевозможные последовательности, связывающие эти числа:

$(\bullet) \to (\bullet\bullet) \to (\bullet\bullet\bullet)$,
$(\bullet\bullet) \to (\bullet\bullet\bullet) \to (\bullet)$,
$(\bullet\bullet\bullet) \to (\bullet) \to (\bullet\bullet)$,
$(\bullet) \to (\bullet\bullet\bullet) \to (\bullet\bullet)$,
....

Будем считать все такие последовательности *упорядоченными множествами*:

$\{\ (\bullet)\ (\bullet\bullet)\ (\bullet\bullet\bullet)\ \}$,
$\{\ (\bullet\bullet)\ (\bullet\bullet\bullet)\ (\bullet)\ \}$,
$\{\ (\bullet\bullet\bullet)\ (\bullet)\ (\bullet\bullet)\ \}$,
$\{\ (\bullet)\ (\bullet\bullet\bullet)\ (\bullet\bullet)\ \}$,
....

Все эти упорядоченные множества определяют *один порядковый тип*, то есть «то общее, которое получается из множества M, если отвлечься от качества элементов M, но сохранять их порядковое расположение» В общем случае порядковый тип является классом, который не всегда совпадает с множеством. Однако, согласно фон Нейману, достаточно взять одного представителя этого класса, например, множество $\{(\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)\}$. Мощность (число элементов) этого множества, т.е. в данном случае число 3, и является порядковым типом приведенной выше совокупности множеств. Таким образом, в теории множеств арифметический принцип «Что больше, то и дальше» получает свое обоснование.

На данном этапе представление порядка количеством не приводит к коллизиям. Однако при построении на количественном принципе «множества действительных чисел» возникают проблемы. К наиболее фундаментальным их них относятся:

- упорядоченность теоретико-множественного континуума вводится «руками» с помощью аксиомы выбора. Это значит, что идея представления порядка количеством «работает» только в простейших ситуациях;

- упомянутая выше диагональная процедура говорит о том, что в континууме возникает некое «обратное» введенной упорядоченности движение.

Избежать этих особенностей теоретико-множественного континуума невозможно. Если вспомнить параллели между количеством и пространством, временем и порядком, соответственно, то названные коллизии - это лишь свидетельство того, что время и пространство являются принципиально различными сущностями и полноценное представление «времени» «пространством» (в любом их понимании) заведомо обречено на неудачу.

Более естественно, со всех точек зрения, мыслить время и пространство как две отдельные, самостоятельные сущности. С точки зрения числа это означает, что его количественная составляющая не зависит от порядковой составляющей. При этом речь идет не просто о том, что число n_Z будет больше или меньше числа n_R - такая ситуация имеет место и в теории множеств. Например, числа $\omega+1$ и ω количественно (по мощности) совпадают, но они различны с точки зрения порядка, т.е. имеют различный порядковый тип. Независимость n_Z и n_R в нашем понимании означает, что это принципиально различные по *качеству* числа. Как уже отмечалось, утверждение именно такой независимости составляет содержание *аксиомы арифметической двойственности.* Таким образом, с точки зрения этого постулата число n - это вектор $\mathrm{n} = (n_R, n_Z)$ с двумя качественно различными компонентами n_R и n_Z .

Попробуем понять, как отражается аксиома двойственности в структуре натурального числа.

Снова возьмем, например, числа $1 = (\bullet), 2 = (\bullet\bullet), 3 = (\bullet\bullet\bullet)$ и всевозможные последовательности, связывающие эти числа:

$(\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet\bullet)$,
$(\bullet\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet\bullet) \rightarrow (\bullet)$,
$(\bullet\bullet\bullet) \rightarrow (\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet)$,
$(\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet\bullet) \rightarrow (\bullet\bullet)$,
....

Если исходить из постулата арифметической двойственности, то все эти последовательности равноправны. Более того, все они реализуются *одновременно*, поскольку время одно! Их нельзя рассматривать как различные элементы какого-либо множества, как это было сделано в предыдущем случае. В этом проявляется принципиальное отличие временной точки зрения на порядок числа в отличие от пространственного, теоретико-множественного подхода, который допускает разделение единого процесса на отдельные «кадры».

Развитие данного подхода приводит к следующему:

С точки зрения теории множеств все перестановки (подстановки) n элементов образуют группу Z_n, в которой можно выделить циклические подстановки и перестановки, меняющие места каких-либо двух элементов.

Все циклические группы можно соотнести с одним фундаментальным вращением Ω. Образно можно сказать, что все n элементов соединены одним вращением. Что касается перестановок, меняющих места элементов, то их естественно понимать, как перемену вращения Ω. В этом случае всю группу Z_n можно закодировать некоторым сверхчислом $\boldsymbol{P}_\mu = < \Omega|(+-)_\mu >$, где $(+-)_\mu$ - некоторое слово в двухбуквенном алфавите «+,-».

Возможность подобного кодирования позволяет по структуре вращения числа n (соответствующего числу $\boldsymbol{P}_\mu$) определить количество его элементов.

Напомним, что в теории множеств решалась обратная задача: по количеству элементов числа n необходимо было определить структуру, отражающую его порядковый аспект.

Возьмем какое-нибудь сверхчисло $\boldsymbol{P}_\nu = <\Omega|+ - + - + ... >$. Будем считать, что каждая перемена вращения порождает по два элемента. Аргументом в пользу этого правила является тот факт, что перемена вращения является «кодом» перестановки двух элементов. Обозначим элементы, порожденные структурой (+ -) через a и b. Структура (- +) также порождает два элемента - c и d. Но поскольку она пересекается со структурой (+ -), элементы c и d отождествляются. Следовательно структура (+ - +) порождает три элемента. В общем случае структура с n-1 переменой фундаментального вращения порождает n элементов.

Для адекватного определения количественной составляющей натурального числа n, на структуру сверхчисла $\boldsymbol{P}_\mu$ необходимо наложить ряд условий, которые в данной работе не обсуждаются. Приведем только простейшие соответствия количества и структуры сверхчисла (отметим, что знак числа также определяется через структуру вращения):

$$+1 = \boldsymbol{P}(_1) =< \Omega| + + + ... + ... >$$

$$-1 = \boldsymbol{P}(_1) =< \Omega| - - - ... - ... >$$

$$+2 = \boldsymbol{P}(_2) =< \Omega| + - + - + ... >$$

$$-2 = \boldsymbol{P}(_2) =< \Omega| - + - + - ... >$$

Построенные на основе фундаментального вращения элементы обладают примечательными свойствами.

Перестановка некоторых элементов из числа n сохраняет его знак (как и в теории множеств). Однако существуют элементы, перестановка которых меняет n на -n, поскольку сама перемена вращения может быть двоякой: с «+» на «-» и с «-» на «+». Говоря языком квантовой механики - одни элементы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна, другие - Ферми-Дирака.

Варьируя структурами с одинаковым числом перемен вращения мы можем улавливать «оттенки в плане соотношения «бозонов» и "фермионов».

Возможность определения *количества через свойства фундаментального вращения* исключительно важный момент для всей теории сверхчисел. Положив в основу всех приведенных построений постулат арифметической двойственности, провозглашающий *равноправие* количественного и порядкового компонентов числа, мы в результате получили нечто большее: количественная составляющая натурального числа может быть *полностью* определена свойствами порядковой составляющей, а именно - переменами направления фундаментального вращения. Напомним, что в теории множеств решалась обратная задача - представление порядковой составляющей числа через свойства множества. Последствия такого обращения очень велики как с идейной, так и технической точек зрения.

Можно предложить, что традиционное понимание натурального числа как количества, а количества как числа элементов возникло на основе представлений макромира. Применение этих представлений в иных ситуациях, например, в микромире, возможно, не столь оправдано. Таким образом, само понятие «натуральный ряд» (даже если исключить все нестандартные модели аксиом Пеано) имеет примерно тот же статус, что и «евклидова геометрия». Заметим, что о возможном несоответствии натурального ряда физическим представлениям (в области больших чисел) говорил еще П.К.Рашевский в знаменитом письме в редакцию журнала УМН «О догмате натурального ряда».

Философские следствия редукции «количества» к «порядку» очень значительны и в первом приближении могут быть проиллюстрированы следующей схемой (рис. 2).

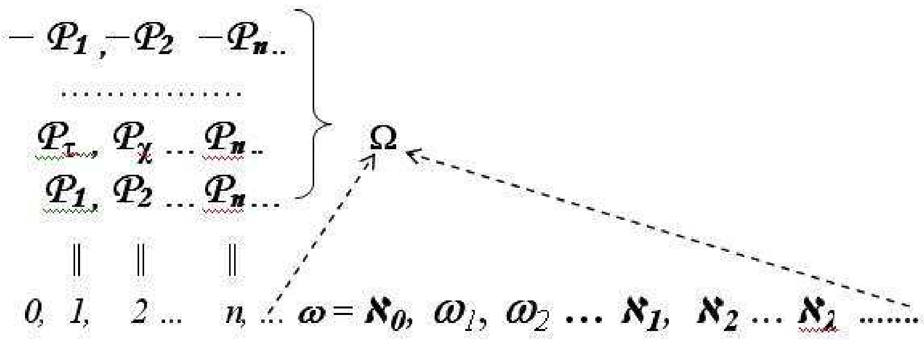

Рис. 2.

Во-первых, на ней хорошо видна замечательная философская метаморфоза. Как известно, Г.Кантор рассматривал свою кардинальную шкалу как настоящую «лестницу в небо» полагая, что наращивание мощности все дальше уводит объект от реальности (эта мысль Кантора стала отправной точкой всех поколений конструктивистов, стремившихся изгнать актуальную бесконечность из математики). Введение «сверхбесконечности» Ω , казалось бы, выводит математику полностью из естественно-научных границ. Однако, как показывает схема, мы приходим к тому, с чего начали, - к натуральному ряду (и его нового расширения).

Во-вторых, она подчеркивает следующее обстоятельство: Основной сверхзадачей теории множеств, по мысли ее создателя Георга Кантора, является синтез арифметики и геометрии. Однако теория множеств в состоянии «арифметизировать» только простейший геометрический объект - «точку», приписав ей кардинальное число $\aleph_0$. Что касается континуума, то он *a'priori* предполагается *множеством*, что можно рассматривать лишь в плане первого приближения.

В-третьих, данная схема показывает, что в математике *нет места финитным образованиям*, поскольку даже натуральные числа заключают в себя бесконечное число Ω со всеми переменами вращения. Это означает, что в любом натуральном числе содержатся *все* натуральные числа. Это парадоксальное заключение противоречит, тем не менее, только теоретико-множественному пониманию числа как *изолированного* количества. Но именно подобная изоляция противоречит физике микромира, где более адекватными являются, например, «партоны» Фейнмана. Существование в «конечном» натуральном числе n всех остальных натуральных чисел является по-сути арифметической формой принципа Маха или монад Г.В.Лейбница.

Из факта включения в натуральное число n всех остальных чисел следует вполне определенный методологический принцип: «Если в рассмотрении находятся n количеств, то всегда можно перейти к рассмотрению m количеств, где m>n» Например, из факта взаимодействие двух частиц, вытекают взаимодействия сразу многих частиц. Этот принцип работает в тех случаях, когда целесообразно перейти к аксиоме арифметической двойственности. Это, по-видимому, имеет место в микромире, где наблюдаются эффекты типа эффекта Мессбауэра, которые вполне объяснимы на основе данного принципа.

2.6. Сделаем следующий шаг в направлении развития идеи определения количества через структуру фундаментального вращения. Мы придадим этой в целом понятной для натуральных чисел идее статус общего фундаментального принципа определения «количества» через «порядок».

Запишем формулу $\mathrm{n} = <(\bullet \bullet \bullet)_n \mid \Omega \mid (+\,\text{-})_n>$ в виде $\mathrm{n} = n_R \boldsymbol{P}_{n_R}$, полагая, что мы можем корректно определить операцию умножения количественного натурального числа на сверхчисло. В общем случае, с той же оговоркой корректности, можно записать: $\mathrm{b} = b_R \boldsymbol{P}_{b_R}$, где b - вещественное число. В этой формуле можно увидеть далеко идущее обобщение формулы Эйлера $\mathrm{z}=b_R e^{i\varphi}$. При этом обобщение касается двух моментов. Во-первых, комплексная экспонента заменяется более общим понятием сверхчисла. Во-вторых в комплексном числе модуль b_R никак не связан с экспонентой $e^{i\varphi}$. Если же констатировать не только факт вращения, но и его структуру, то согласно сформулированному принципу модуль b_R детерминируется структурой перемен вращения в $\boldsymbol{P}_{b_R}$. В дальнейшем будем называть формулу $\mathrm{b} = \mathrm{b}_R\ \boldsymbol{P}_{b_R}$ формулой Родионова.

Приведем схему шагов, позволяющих реализовать сформулированный общий принцип и извлечь количественное вещественное число из структуры сверхчисла (структуры перемен направления фундаментального вращения).

Очевидно, что если количественная составляющая целого числа определяется структурой сверхчисла, то подобное утверждение справедливо и для рационального числа (конкретную конструкцию мы в данный момент не рассматриваем).

Если имеется последовательность рациональных чисел, каждое из которых определяется структурой сверхчисла, то с помощью диагонального метода можно построить сверхчисло, структура которого отражает *всю* последовательность. Например, сверхчисло $\boldsymbol{P}_\gamma$ для приведенной ниже последовательности γ, состоящей из рациональных чисел r_i, может выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{P}(r_1) =< \Omega| - + - + - ... >$$
$$\boldsymbol{P}(r_2) =< \Omega| + - - + + ... >$$
$$\boldsymbol{P}(r_3) =< \Omega| + - - + + ... >$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{P}_\gamma =< \Omega| + + + ... >$$

где $\boldsymbol{P}(r_i)$ - сверхчисло, соответствующее рациональному числу r_i.

При этом важно отметить следующий момент. Структуры чисел $\boldsymbol{P}(r_i)$ содержат в себе некоторую закономерность. Напротив, структура числа $\boldsymbol{P}(r_\gamma)$ a'priori не подчинена никаким закономерностям и поэтому может считаться случайной. Таким образом, сверхчисло $\boldsymbol{P}_\gamma$ с точки зрения неограниченной случайной последовательности «+» и «-» («0», «1»; «орел», «решка») можно рассматривать как *случайное* (при этом, разумеется, сначала надо ввести понятие вероятностного пространства на совокупности неограниченных последовательностей «0» и «1»). Это интуитивное утверждение может быть сделано строгим, если воспользоваться энтропийным походом, в рамках которого можно определить случайность *индивидуальной* последовательности. Заметим также, что связь непрерывного и случайного отчетливо осознается в «булевозначных моделях» теоретико-множественного универсума, с помощью которых можно опровергнуть континуум-гипотезу (Д.Скотт, Р.Соловей). Именно совокупность случайных чисел можно рассматривать как модель континуума. Однако до истинного континуума ей «не хватает» множества меры нуль. В теории множеств преодолеть этот барьер невозможно. Однако это вполне можно сделать перейдя к порядковой бесконечности. Таким образом, теория сверхчисел высвечивает новую двойственность: «непрерывное» - «случайное». Эта двойственность проявляется и в самом понимании вещественного числа.

Как известно, вещественное число может быть определено как класс фундаментальных последовательностей. Если каждой фундаментальной последовательности γ сопоставить сверхчисло $\boldsymbol{P}_\gamma$, то *классу* фундаментальных последовательностей, определяющих вещественное число d, естественное сопоставить следующее сверхчисло:

$$\boldsymbol{P}(d) = \sum_\gamma \boldsymbol{P}_\gamma(\gamma \sim d)$$

Эта формула, с одной стороны, есть всего лишь новая запись классического канторовского определения вещественного числа. С другой стороны, в силу сделанного выше замечания, сверхчисло $\boldsymbol{P}(d)$ есть сумма «случайных сверхчисел» $\boldsymbol{P}_\gamma(\gamma \sim d)$. Наконец, вспоминая принцип определения количества через порядок, можно сказать, что сверхчисло $\boldsymbol{P}(d)$ определяет и само вещественное число d.

2.7. Рассмотренная выше математика очень «физична», что, разумеется, не может быть случайным. Однако, чтобы навести мосты между рассмотренными конструкциями и современными физическими представлениями, необходимо сделать ряд шагов.

Начнем с того, что волновую функцию Ψ вполне можно трактовать как целостный объект, обладающий внутренней динамикой - вращением, т.е. как некое сверхчисло $\boldsymbol{P}_\mu$. Во всяком случае, это не противоречит ее традиционному пониманию как «волны вероятности» нахождения частицы в данной точке пространства. Соотношение $\lambda = \hbar/p$ параметров волны и частицы и утверждения, что сама волновая функция представляет собой сверхчисло, позволяет придать фундаментальному постулату де Бройля следующий вид: *физическая величина импульса* p *имеет своим значением сверхчисло, т.е.* $|\mathrm{p}| \in \{\ \boldsymbol{P}_\gamma\ \}$.

Покажем, что эта переформулировка является фундаментальной и, по-сути, вскрывает внутреннюю пружину квантовой механики. Полагая значением p действительное число, мы возвращаемся в рамки классической механики.

Рассмотрим далее совокупность пар $\mathcal{F} = \{(\omega_k; \boldsymbol{P}_\gamma)\}$ (мы будем крайне осторожно использовать термин «множество»). Числу ω_k соответствует *геометрический* объект - точка, числу $\boldsymbol{P}_\gamma$ - *динамический* объект - вращение. Принимая во внимание тот факт, что числа $\boldsymbol{P}_\gamma$ можно рассматривать как значения импульса, саму совокупность $\mathcal{F}$ можно соотнести с *фазовым пространством.* При этом переменная q будет пробегать по «точкам», а переменная p - по «вращениям».

Выясним теперь, каким образом можно интерпретировать основной постулат $|\mathrm{p}| \in \{\ \boldsymbol{P}_n\ \}$ в теоретико-множественной области.

Сверхчисло $\boldsymbol{P}_n$ можно естественно представить некоторым замкнутым контуром γ (возможно, крайне нетривиальным с топологической точки зрения). Импульс p в этом случае можно понимать как определенную на вектор γ функцию p(q). Поскольку соотношение $|\mathrm{p}| \in \{\ \boldsymbol{P}_n\ \}$ инвариантно относительно любых теоретико-множественных конструкций, контур и функция p(q) должны быть согласованы таким образом, чтобы циркуляция p(q) вдоль контура была бы *постоянной*.

Приведенное замечание позволяет сделать следующий шаг.

Определим отображение $P\ell$ совокупности сверхчисел $\{\ \boldsymbol{P}_n\ \}$ - натуральных чисел в совокупность действительных чисел следующим образом:

$P\ell(\boldsymbol{P}_k) = \mathrm{m/k} \int\limits_\gamma \mathrm{p(q)dq}$ при m-кратном обходе контура γ.

Нормирующий множитель 1/k вводится для устранения коллизий между числом m обхода γ и числом $\boldsymbol{P}_k$. Согласно сделанному замечанию интеграл не зависит от контура γ и равен некой постоянной величине, которая определяется *только* числом $\boldsymbol{P}_k$.

Как известно, величина $\int\limits_\gamma \mathrm{p(q)dq}$ равна постоянной Планка $\hbar$. Тогда отображение Pℓ можно назвать *планковским* отображением, а его значением при однократном обходе контура будут:

$$\mathrm{P}\ell(\boldsymbol{P}_1\ ) = \hbar,$$
$$\mathrm{P}\ell(\text{-}\boldsymbol{P}_1\ ) = \text{-}\hbar,$$
$$\mathrm{P}\ell(\boldsymbol{P}_2\ ) = \hbar/2,$$
$$\mathrm{P}\ell(\text{-}\boldsymbol{P}_2\ ) = \text{-}\hbar/2,$$

....

Таким образом, арифметические «бозоны» и «фермионы», определенные выше, во всяком случае получает правильное значение спина.

2.8. Сделаем следующий шаг и выясним физический смысл формулы:

$$\boldsymbol{P}(d) = \sum_\gamma \boldsymbol{P}_\gamma(\gamma \sim d)\ (*)$$

Несколько изменим ситуацию, сохраняя все принципиальные моменты данного соотношения.

Рассмотрим пространство R^3. Как известно, траектория от точки A до точки B определяется как класс путей, соединяющих A и B. Далее, от переменных q, p («координаты», «импульс«) путем известных преобразований можно перейти к координатам φ, S («угол», «действие»). Поскольку импульс, согласно квантовому постулату, имеет своим значением сверхчисло, то и действие также должно иметь значение из области сверхчисел. Наконец, можно отметить, что волновую функцию можно рассматривать как сверхчисло или, более точно, как некое приближение сверхчисла.

Дальнейшие рассуждения проходят по следующей схеме.

Рассмотрим движение материальной точки между A и B. Расстояние от A до B по действительной траектории движения обозначим через d. Очевидно, d количественное действительное число. Рассмотрим какой либо путь из A точки в точку B. Этому пути соответствует действие S, которое имеет своим значением сверхчисло $e^{iS/\hbar}$. В этом сверхчисле *действительное значение* S является *линейным* приближением фундаментального вращения - сверхчисла.

Таким образом, (*) превращается в хорошо известное соотношение Фейнмана, особенно если учитывать отмеченный выше вероятностный характер соотношения (*).

Не производя в данный момент детальный рефлексии полученного результата, сделаем, тем не менее, достаточно естественный вывод, что квантовую механику можно рассматривать как теорию фундаментальных вращений, которые раскрываются через физические вращения. В этом плане она похожа, скажем, на теорию приближений, где объекты, характеризуемые действительными числами, изучается, через рациональные приближения. Будущее покажет, правильной ли является такая аналогия.

3.

Вернемся к первоначальной задаче и попробуем понять, что дает теория сверхчисел для понимания природы континуума.

Во-первых, становится очевидным, что теоретико-множественный, статический континуум - это, по сути дела, не существующий объект. Диагональный процесс имманентно присутствующий в его структуре можно считать проявлением его сверхчисловой природы. Вещественное число, «прикрепленное» к каждой точке континуума, можно рассматривать как линейный «фрагмент» фундаментального вращения - сверхчисла. Сама же «точка» становится приближением некой «не-точки»

- геометрического образа сверхчисла. Этот континуум, с точки зрения теории множеств, заведомо динамичен, что, в частности, не дает возможности «подсчитать» в нем количество точек («линейных фрагментов») и, следовательно, определить мощность, что немедленно влечет, в частности, независимость континуум-гипотезы от остальных теоретико-множественных аксиом.

Во-вторых, количественные характеристики континуума, например, расстояние между двумя «точками» определяются через фундаментальное вращение. С другой стороны, приближением фундаментального вращения является волновая функция - амплитуда вероятности перехода из одной «точки» в другую. Таким образом, расстояние между точками континуума определяется через амплитуды перехода, т.е. физические взаимодействия. Это говорит о том, что метрика континуума (и сам, континуум), в частности, пространственно-временной континуум, имеют *реляционную* природу. Это совпадает с трактовкой пространственно-временного континуума в теории БСКО (Бинарной системы комплексных отношений) Ю.С.Владимирова. Примечательно, что в теории БСКО расстояние между точками как и в теории сверхчисел, определяется на основе аналога формулы Фейнмана (*) из предыдущего пункта.

4.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность всем, кто своими мыслями и действиями способствовал развитию теории сверхчисел. Это, прежде всего, Б.У.Родионов, без которого само появление этой теории было бы невозможным. Дискуссии с Ю.С.Владимировым и В.Д.Захаровым способствовали прояснению ее многих положений. Подключившийся на заключительном этапе А.С.Бешенков высказал ряд мыслей, в которых намечена новая линия развития теории. Всем им автор приносит свою глубокую благодарность.

Список литературы

[1] Ю. С. Владимиров, *Геометрофизика.* - М. Бином. Лаборатория знаний, 2005.

[2] Д. Гильберт, П. Бернайс, *Основания математики.* - Основания математики, М. Наука, т. 1, 1979.

[3] Г. В. Лейбниц, *Монадология* - соч. т. 1. М. 1982.

[4] A. Robinson, *«Non-Standard analysis».* - Amsterdam: North-Holland, 1966.

[5] Г. Вейль, *Континуум.* - Математическое мышление, М., Наука, 1989.

[6] Б. У. Родионов, *Регистрация континуальных токов* - Метафизика XXI. М. Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[7] С. А. Векшенов, *Является ли «множество действительных чисел» множеством* - Вестник ТГУ. Сер. Естественные и технические науки. Том 5, вып. 5, стр. 519-535.

[8] С. А. Векшенов, Ю. С. Владимиров, *Об основаниях математики и физики* - Метафизика XXI. М. Бином. Лаборатория знаний, 2006.

[9] Б. У. Родионов, С. А. Векшенов, *Дуальная структура континуума и фазовое пространство* - Фундаментальные исследования материи в экстремальных состояниях. МИФИ, М. 2007, с. 63-64.