Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть I. Междисциплинарное исследование. М.: Изд. Моск. ун-та. 1996. С. 153-199.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕМПОРАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Р. И. Пименов

§1. Вводные замечания

1.1. Место этой работы в ряду других

В настоящей работе определяется или описывается около сотни математических (геометрических) терминов, связанных с собирательно-разговорным словом "время". Но упомянутые термины вводятся не как навязанные извне, скажем, посредством эмпирической генерализации реальности или системологической конкретизации реальности, или системологической конкретизации общих философских категорий. Они мыслятся как последовательное развитие и усложнение одной математической темы — отношения рода порядка. Это отношения, которые возникают при разработке оснований математики, в математической логике и в самом начале теории множеств. Здесь рассматривается "порядок" и его морфизмы не в самом общем виде, а в той конкретной модификации, которая допускает интерпретацию порядка в виде "то-то случилось раньше того-то". С конца 1960-х годов ключевое слово в исследованиях на эту тему — "кинематика" (Пименов, 1968). Частными задачами одной из кинематик занимается "хроногеометрия" (Александров, 1959), а родственными — теория "каузального строения пространства-времени" (Пенроуз, 1972). Мы надеемся, что наша работа поможет несколько уменьшить тот разнобой в темпоральной терминологии, который подчас существенно затрудняет взаимопонимание на конференциях, когда присутствуют представители разных школ.

1.2. Математические прелиминарии

Мы будем описывать разнообразные математические конструкции. Сама математика при этом понимается не как учение о числе, величине или о чем-то количественном, а как *язык* определенного рода, язык, возникающий *на базе ограниченной части русского языка*, настолько ограниченной, что *недоразумения* при пользовании этой частью языка практически *исключаются*. Именно, математическая логика разрешает пользоваться такими словами, как: “и” (“&”); “или” (“$\vee$”); “влечет” (“$\Rightarrow$”) в контексте “фраза A влечет фразу B”, “из высказывания A вытекает логически неизбежно высказывание B”; “равносильно” (“$\Leftrightarrow$”); “не” (“$\rceil$” или иногда “~”); “существует” (“$\exists$”), фраза “существует элемент x такой, что выполняется высказывание $P(x)$” на языке математической логики выглядит так: “$\exists x\ P(x)$”; для любого (“$\forall$”), высказывание “для любой переменной x с областью изменения X верно $P(x)$” обозначается “$\forall x \in X\ P(x)$”; “тот x, для которого верно $P(x)$” обозначается “$\arg P(x) = 0$”. От сложного социопсихического и фонетически-семантического понятия “слово” в математической логике остается только понимание “слова” как совокупности букв в алфавите, точнее, не совокупности, а последовательности, зато тщательно подсчитывается число правых и левых скобок.

За счет обеднения языка удается выработать устойчивые конструкции, в отношении которых можно гарантировать, что *пользование ими не приведет к противоречию* (т.е. к результатам вроде “$0 = 1$” или “A есть не A”). Гарантия эта двояка: с одной стороны, за непротиворечивость ручается теория математической логики, а с другой — практика пользования такими конструкциями в конкретном программировании на ЭВМ. В этом смысле математика следует заповедям одного из создателей современной математики Декарта, который учил, что начинать рассуждения следует с *простейшего*, с того, что интуитивно ясно и бесспорно, постепенно продвигаясь от простого ко все более сложному, на каждом шаге сохраняя все ту же четкость и воспроизводимость мышления. (Позже в школе гегельянцев этот принцип, как и другие, подвергся мистифицированию, превратившись в тезис, будто бы “природа” “развивается от простого к сложному”. Наш познавательный процесс был приписан предмету нашего изучения.) В своем изложении мы не будем приводить доказательства — это вопрос технический, а только опишем результаты.

С позиций математической логики всякое *определение* не есть отсылка к чему-то известному, а есть лишь *сокращение* нескольких слов или фраз в одно слово. Например, вместо того чтобы длинно говорить, повторяясь, “множество A в топологическом пространстве не может быть представлено объединением двух непересекающихся открытых множеств”, говорят короче: “множество A связно”. Вместо того чтобы говорить: “задан алгоритм, который по каждому натуральному числу вырабатывает одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9”, говорят: “задано конструктивное вещественное число” и т.п.

Важным компонентом использования математических конструкций является операция *интерпретации*. Она заключается в том, что математическому символу сопоставляется нечто уже не из этих символов (Черч, 1960). Интерпретация бывает *внутриматематическая* (иначе называемая *формальной*), когда символу сопоставляется математический же символ, но из другого раздела. Например, символу “$A < B$” сопоставляется “полином B делится на полином A”. Важнее другой тип интерпретации, так называемая *содержательная* интерпретация, когда математическому символу сопоставляется некая сущность из чего-то *вне математики*. Например, тому же символу “$A<B$” сопоставляется фраза “Иванов богаче Петрова”. Например, символу $\{\{\varnothing\},\{\varnothing, \varnothing\}\}$ (что эквивалентно передается символом “2”) могут быть сопоставлены “два яблока”, “два автомобиля”, “два разных момента времени”, “два реагента” и т.п. Существен в такой интерпретации ее *последовательный* и *принудительный* характер. Это значит, что если мы один раз произвели такое сопоставление, то мы должны на протяжении нашего рассуждения повсюду сохранять его, не утаивать от себя случаи, когда такое сопоставление-отождествление неприятно. *Все* символьные формулы, выведенные математически, мы должны прочитать на языке этой интерпретации, *все* рассматриваемые факты и объекты должны перевести на язык этих символов. Иногда окажется, что такая интерпретация пробуксовывает, перестает быть осуществимой. Например, если мы занимаемся диахронным рассмотрением набора городов и названный символ трактуем как “два города”, то при слиянии городов новому объекту мы должны приписать символ “$\{\varnothing\}$” (“1”), и получается “2 =€1”, т.е. противоречие. Или, если бы мы захотели интерпретировать этот символ как “две мысли”, то мы сразу бы обнаружили переливчатый, дробимый и универсальный характер “мысли” и не смогли бы число мыслей выразить математически. Конкретнее операция интерпретации будет прослежена на примерах ниже.

Отметим, что употребление термина “интерпретация” противоположно в таких науках, как математика и археология. В науках, связанных с математической логикой, и в неопозитивизме переход от словесной, “формальной” модели к “содержательным” рассуждениям, где речь идет об операциях над какими-нибудь эмпирически заданными предметами, называется *интерпретацией*. Обратный переход называется *экспликацией*. В археологии же интерпретацией называется переход от обозрения сохранившихся черепков, бревен, украшений, бересты к словесно сформулированным моделям (“исторический факт”, “культура”), т.е. как раз то, что в физико-математических науках назвали бы экспликацией.

1.3. Понятие множества и наши уровни рассмотрения

Мы будем придерживаться широко распространенного наивного теоретико-множественного языка, выход в по-разному утонченные аксиоматические теории множеств или же в более модерный язык категорий и топосов ничего не изменит по существу в рассматриваемых нами моделях. Даже переход от классической логики к конструктивной, модальной, темпоральной или квантовой не затронул бы основы излагаемых нами моделей, хотя, конечно, пользоваться громоздкими конструкциями из наших моделей в этих логиках пришлось бы по-разному.

Итак, мы начинаем с объекта[1], называемого *множеством*. Про такой объект достаточно знать, что он состоит из *элементов*, т.е. $x \in M$, где x — элемент, M — множество, а символ “$\in$” читается “принадлежит”. Совокупность элементов a, b, ... из M сама образует множество, которое обозначается $\{a, b, ...\}$. Это множество является частью множества M, что записывается $\{a, b, ...\} \subset M$, где знак “$\subset$” читается “содержится в”. Одно специальное множество, не содержащее никаких элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Итак, введены понятия: объекты — “множество”, “элемент”; отношения (двуместные) “$\in$” и “$\subset$”; специальный объект, или, как говорят порой, “константа” — “пустое множество”; вспомогательный символ “$\{\}$”. Больше никаких исходных понятий мы не вводим. На базе этих понятий конструируются операции:

а) *объединения* множеств, когда из A и B возникает множество-сумма $A \cup B$;

б) *пересечения* множеств, когда из тех же множеств образуется максимальное множество, содержащееся в них, $A \cap B$;

---

[1] В математической логике “объект” есть частный случай “понятия”.

в) *дополнения* множества A до множества M, которое обозначается $A \backslash M$;

г) *множество всех подмножеств* данного множества M, которое обозначается 2^M, так что запись $A \subset M$ равносильна записи $A \in 2^M$;

д) *произведения* $M \times N$ множеств M и N, т.е. множество пар $M \times N =€\{(x, y) | x \in M \ \& \ y \in N\}$;

е) *множество* N^M *отображений* (функций) из M в N, т.е. $N^M = \{f | f: M \to N\}$.

Обычно вместо $\rceil x \in M$ пишут $x \notin M$ и т.д. Мы приводим эти операции только в качестве напоминания (см., например, Левич, 1982).

Формальное понятие множества, как состоящего из элементов, может быть интерпретировано, например, как множество всех страниц данной книги, всех песчинок в данной куче песка, всех звезд, всех ангелов Божиих и т.п. Нельзя его интерпретировать как множество всех капель в океане, ибо капля от капли в океане не отделена, не отграничена, всех элементарных частиц, ибо они взаимопревращаются и не находятся в устойчивом состоянии.

Кроме понятия множества мы будем предполагать известным понятие вещественного числа, множество всех стандартных вещественных чисел обозначим R. Коль скоро заданы эти объекты, то мы имеем право конструировать из них производные объекты, например, отображение $f: A \to B$ множества A во множество B или отображение $g: C \to R$ из множества С во множество вещественных чисел. (Формально первое есть некоторое подмножество $f \subset A \times B$, где $A \times B$ — “произведение” пары множеств, но мы не станем заниматься такими уточнениями.)

Все наше рассмотрение будет производиться как бы сразу над тремя уровнями. *Первый уровень,* когда мы ничего, кроме *абстрактного множества* M и *вещественных чисел* R, не имеем и словно не знаем. Этот уровень рассмотрения мы будем называть теоретико-множественным (иногда “топологическим”, поскольку такая вольность речи будет оправдана).

На следующем уровне мы, кроме M и R, считаем заданными еще *топологию*, т.е. какое-то $T \subset 2^M$, и *гладкость*, т.е. какое-то $F \subset R^M$. На этом уровне возникают такие термины, как “дифференцируемое многообразие”, “касательное пространство”, “ковариантное дифференцирование” и т.п. Этот уровень мы будем называть “дифференциально-топологическим” или “дифференциально-геометрическим”. Общая теория относительности относится к этому уровню рассмотрения.

На третьем уровне дополнительно считаем заданными еще операции “+”: $M \times M \to M$ и “·“ : $R \times M \to M$, называемые “векторной структурой” (она же “линейная”, она же “аффинная”). К этому третьему уровню относятся, например, евклидова геометрия или специальная теория относительности.

§2. Линейные структуры порядка

2.1. Отношение рода порядка

Специфичным для нашего рассмотрения на всех трех уровнях и главным будет для нас *отношение рода порядка*. Это отношение связывает два элемента x и y из множества M, поэтому оно является “бинарным” или “двуместным” отношением. У нас будут фигурировать три разновидности этого отношения:

“<” — отношение *строгого порядка*;

“≤” — отношение *предпорядка;*

“≺” — отношение *локального следования*.

Первое антисимметрично ($\rceil(x < y \;\&\; y < x)$), а потому и нерефлексивно ($\rceil x < x$), транзитивно ($x < y \;\&\; y < z \Rightarrow x < z$). Второе рефлексивно и транзитивно, а множество элементов, для которых верно $x \le y \;\&\;\; y \le x$, варьируется от $x = y$ до более богатых. Отношение локального следования антисимметрично, но удовлетворяет аксиоме лишь *локальной транзитивности*:

$$\forall x \forall y \forall z \begin{pmatrix} (\exists p\; p\, \mathrm{p}\, x \,\&\, p\, \mathrm{p}\, y \,\&\, p\, \mathrm{p}\, z \;\vee \exists q\;\; x\, \mathrm{p}\, q \,\& \\ y\, \mathrm{p}\, q \,\&\, z\, \mathrm{p}\, q) \Rightarrow \big((x\, \mathrm{p}\, y \,\&\, y\, \mathrm{p}\, z) \Rightarrow x\, \mathrm{p}\, z\big) \end{pmatrix}. \qquad (2.1.1)$$

Локальное следование можно вводить и несколько иначе, комбинируя отношение строгого порядка с отношением близости $a \,|\, b$ (вариант отношения толерантности), но мы не станем углубляться в эти тонкости (Пименов, 1968, 1987). Приведем лучше несколько внутриматематических примеров (интерпретаций) отношений рода порядка. Ясно, что “$<$” есть частный случай “$\prec$”.

Пример 2.1.1. Хорошо известен порядок вещественных чисел, когда $1 < 2$, $3 < \pi < 8 < \pi^2$ и т.п. Это строгий порядок.

Пример 2.1.2. Аксиомам предпорядка удовлетворяет отношение включения $\subset$ множеств, если рассматривать его как заданное на 2^M. В самом деле, если $A, B, C \subset M$ и $A \subset B$, $B \subset C$, то поэлементно видно, что $A \subset C$. При этом $A \subset B \ \& \ B \subset A \Rightarrow A = B$, поэтому иногда отношение $\subset$ называют не предпорядком, но “нестрогим порядком”. Заметим, что отношение “$\in$” нетранзитивно (ибо $x \in \{x\}$, но $x \notin \{\{x\}\}$), так что не является отношением рода порядка.

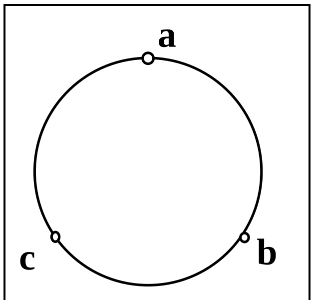

Рис.1

Пример 2.1.3. На окружности введем направление (ориентацию), например, по часовой стрелке (рис.1). Далее говорим, что $x \prec y$, если в смысле ориентации точка x предшествует точке y и при этом угловое расстояние между точками x и y меньше $180°$. Тогда для точек x, y и z, разделенных углами по $120°$ верно $x \prec y \ \& \ y \prec z \ \& \ z \prec x$, но неверно $x \prec z$. Отношение локального следования не должно непременно содержать такие замкнутые циклы.

Пример 2.1.4. Пусть $x, y \in R$. Говорим, что $x \prec y$, если $x < y$ в смысле обычных вещественных чисел и при этом $|x-y| < 10$, тогда $1 \prec 9 \prec 15$, но не выполняется $1 \prec 15$ (как и $15 \prec 1$).

Беря в примере 2.1.3 угол не $180°$, а меньший, можно варьировать отношение “$\prec$” так, что уже цепочка $a \prec b \prec c \prec a$ станет невозможной, но останется возможной цепочка $a \prec b \prec c \prec d \prec a$ и т.д.

Пример 2.1.5. Внематематически “$<$” может истолковываться как “отношение предпочтения” в экономике; например, x <€y означает, что покупатель предпочитает товар x товару y.

П р и м е р 2.1.6. Аналогично отношение $x \prec y$ можно интерпретировать следующим образом: обычно Иванов (x) проигрывает в шахматы Петрову (y). При этом может статься, что Петров проигрывает в шахматы Сидорову, а Сидоров, в свою очередь, проигрывает Иванову (замкнутая цепочка). Сравнительно с примерами 2.1.1—2.1.4 два последних не требуют *количественных критериев*. Для теории пространства-времени крайне важны следующие два внутриматематических примера.

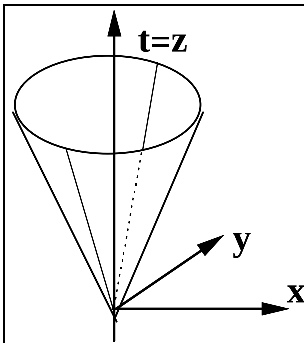

Рис.2

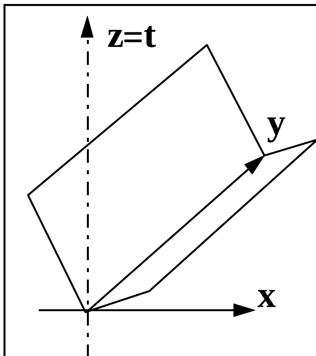

Рис.3

П р и м е р 2.1.7. В трехмерном евклидовом пространстве рассмотрим прямой круговой конус $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ с вершиной $(0,0,0)$. Будем мыслить по такому конусу в каждой точке. Отношение "$\leq$", вводимое формулой

$$(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow$$

$$z_2 - z_1 \geq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

является отношением нестрогого порядка. На рис.2 порядок этот выражается тем обстоятельством, что точка (x_2, y_2, z_2) лежит *внутри или на границе конуса* с вершиной в точке (x_1, y_1, z_1), при этом (x_2, y_2, z_2) может и совпадать с (x_1, y_1, z_1).

П р и м е р 2.1.8. В таком же пространстве отношение порядка, базирующееся не на конусе, а на двугранном угле (рис.3), задается формулой

$$(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow z_2 - z_1 \geq |x_2 - x_1|,$$

где координата не входит в формулу! Это уже будет отношение предпорядка: если выполнено

$$(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2) \& (x_2, y_2, z_2) \leq (x_1, y_1, z_1),$$

то вторая точка лежит на ребре $x = x_1$, $z = z_1$ нашего двугранного угла, т.е. это любая точка на оси ординат y.

Таковы, в принципе, все простые примеры отношений рода порядка. К сожалению, широко известен только первый. Простоты ради мы здесь не занимаемся случаями, когда задано несколько множеств, каждое со своим отношением порядка, а на пересечениях эти порядки как-то согласованы. Это *локальное задание* порядка надо отличать от *локального следования*, которое все-таки *одно* на *всем* множестве и в этом смысле "глобально".

2.2. Темпоральная интерпретация примеров

Специфической для рассуждений насчет "времени" является интерпретация, в которой $a < b$ понимается как "a раньше b". Само слово "время" мы понимаем скорее собирательно, т.е. как ярлык на сундуке, в котором лежат разнообразные термины и сочетания терминов, как-то в своей совокупности обозначаемые данным ярлыком. Точка из множества стандартно интерпретируется как "миг", "мгновенное событие", "то, что не имеет ни длины, ни ширины, ни высоты, ни длительности"; однако контекст употребления таков, что слово "длительность" как-то употребляется. Тогда чтение символьной записи $a < b$ уточняется: "событие a произошло (происходит, будет происходить[1]) раньше события b".

Пример 2.2.1. По сути повторяется пример 2.1.1, но с каждым вещественным числом $x \in \mathbf{R}$ мы ассоциируем некую дату или темпорату события X. Запись $x < y$ означает, что X (событие с темпоратой x) случилось *раньше, чем* событие Y (с темпоратой y). Так описывается та темпоральная модель, в которой "время течет" от $-\infty$ до $+\infty$, непрерывно проходя через все значения вещественных чисел. Это строгий порядок, в котором нет ни первого, ни последнего элемента (ни творения мира, ни его конца).

[1] В математических формулах не присутствует грамматический показатель времени. Правильно было бы озвучить их не в изъявительном наклонении (indicative), а в сослагательном (conjonctive), когда, как в латыни, "*est*" заменяется на "*esse*" или, как в немецком, — "ist" на "sei".

Очевидна понятийная связь хронологической идеи “раньше-позже” и *каузальной* идеи “потому что”. “*Propter hoc ergo post hoc*” обычно не ставится под сомнение, высмеивается обратное. Порой происходит некоторое отождествление этих идей: “если a раньше b, то физический (или психический) процесс в a мог ведь в принципе повлиять на происходящее в b, а потому можно считать a в каком-то смысле причиной для b” — рассуждают авторы. Такое понимание отношения “$<$” как *потенциальной причинности* весьма плодотворно для некоторых исследований. Однако эта терминология, во-первых, не проводит различения между “фактором” и “причиной”, а во-вторых, транзитивность “$<$” может завести в тупик. Скажем, мои родители познакомились *благодаря* тому, что мой отец носил кепку. Благодаря этому я родился, благодаря тому-то окончил Университет. Можно ли по транзитивности сказать, не уподобляясь Козьме Пруткову, будто бы я окончил Университет благодаря тому, что мой отец носил кепку?! Во избежание таких несуразиц удобнее пользоваться моделью локального следования. Слишком далеко разнесенные во времени события можно считать не связанными ни причинной, ни хронологической зависимостью, слово “далеко” здесь можно понимать не количественно, а качественно. Соответственно интерпретируются примеры 2.1.3, 2.1.4. Слова “благодаря”, “вопреки”, “из-за”, “несмотря”, “причина”, “следствие”, “фактор”, “эффект” и др. обретают при пользовании локальным следованием характер локальных, близкодействующих связок. В силу этого делаются возможными циклы $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \dots a_n \prec a_1$, которые можно интерпретировать либо как “машину времени”, либо как “метаболический цикл И.А.Аршавского”.

Пример 2.2.2. Данный пример представляет переформулировку примера 2.1.7 в темпоральных терминах: координата z заменяется на темпорату t и для физической наглядности вводится еще константа c, называемая скоростью света. Формула приобретает вид

$$\begin{gathered}(t_1, x_1, y_1) \le (t_2, x_2, y_2) \Leftrightarrow \\ t_2 - t_1 \ge \frac{1}{c}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{gathered} \tag{2.2.1}$$

и означает, что событие (t_2, x_2, y_2) хронологически следует за событием (t_1, x_1, y_1), если можно из (t_1, x_1, y_1) достигнуть (t_2, x_2, y_2), двигаясь со скоростью, меньшей или равной c. Это хронологическое упорядочение лежит в основе специальной теории относительности, а некоторое его обобщение — в основе так называемой хроногеометрии (Гуц, 1982).

Пример 2.2.3. Переформулируется пример 2.1.8 такой же заменой z на t. Но теперь формула

$$(t_1,\ x_1,\ y_1) \le (t_2,\ x_2,\ y_2) \Leftrightarrow t_2 - t_1 \ge |x_2 - x_1| \qquad (2.2.2)$$

означает, что движение в направлении оси абсцисс x должно иметь ограниченную (во взятых масштабах — единицей) предельную скорость, а в направлении оси ординат y можно двигаться со сколь угодно большой скоростью — $-\infty < dy/dt < \infty$. Применительно именно к *пространству* едва ли такая модель удобна, но применительно к величинам иной размерности (физической, биологической или иной) она не выглядит отталкивающей. Например, если e — заряд, то в физике неизвестно никаких ограничений на величину de/dt. Поэтому, заменив y на e, получаем вполне не противоречащую эмпирике многомерную единую модель пространства электричества.

В дальнейшем предметом нашего рассмотрения будет всегда структура “частично упорядоченного” множества $(M, <)$ (M может варьироваться) при интерпретации $<$ (или $\le$, или $\prec$) как “раньше”.

Для сокращения формулировок пригодится одно производное понятие.

Определение 2.2.1. *Назовем интервалом с вершинами* a *и* b (*при* $a < b$, *или* $a \le b$, *или* $a \prec b$) *множество* $\{x \mid a \prec x \prec b\} =\in(a,b)$.

Отметим, что распространено словоупотребление, которое с “интервалом” связывает *число, числовую меру* — от a до b. У нас это множество событий той же природы, что начало a и конец b интервала. В качестве интервалов выделяется некий класс подмножеств в заданном частично упорядоченном M, т.е. фактически указывается *топология*. Поэтому, работая с частично упорядоченным множеством, мы на деле работаем в некотором топологическом пространстве, чем мы и будем пользоваться в дальнейшем, разрешая себе говорить про связность, непрерывность, границу ∂A множества $A \subset M$ и прочее в смысле именно этой интервальной топологии.

Отметим два интересных для интерпретации понятия.

Определение 2.2.2. *Будущим для события* a *называется множество* $\{x \,|\, a \prec x\}$, *обозначаемое* a^{+}, *прошлым для события* a *называется множество* $\{x \,|\, x \prec a\}$, *обозначаемое* a^{-}.

Если исходно у нас задан строгий порядок или предпорядок, то $(a,b) = a^{+} \cap b^{-}$. Для локального следования это не так.

2.3. Самодовлеющий темпоральный поток

Особо интересен и важен один частный случай упорядоченного множества, именно, *линейно упорядоченное* множество. Так называется структура $(L,<)$ (мы стандартно в этом случае вместо произвольного M пишем L), если выполнена аксиома $\forall x, y \in L \;\; x < y \vee x = y \vee y < x$. Для "$\leq$" верна та же формула, а для "$\prec$" квантор $\forall x,y \in L$ заменяется на $\forall a,b \in L \; \forall x,y \in (a,b)$.

Все линейно упорядоченные структуры распадаются на два гомотопических типа: либо "бесконечное", "линейное" линейно упорядоченное множество, в котором нет цепочек $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec a_1$, либо же "замкнутое", "циклическое" линейно упорядоченное множество, в котором есть цепочка $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec a_1$ $(n > 2)$, и для всякого $x \in L$ найдется номер $i = 1,..,n$, при котором $x \prec a_i$, или $x = a_i$, или $a_i \prec x$.

Эти два типа, в свою очередь, подразделяются на подтипы в зависимости от ответа на *вопрос о дробимости*: всегда ли между двумя заданными $a < b$ найдется событие (элемент, точка) x при $a < x < b$? Таким образом выделяются так называемые "дискретные" (иногда говорят ε-несвязные) модели. Крайний здесь случай, когда число элементов в M конечно, и тогда теория частично упорядоченного множества $(M, \prec)$ оказывается теорией конечных графов. Этот случай мы не рассматриваем. Такие графы употребительны в кибернетике, в теории эволюции. Наиболее распространены в физике и в быту те модели, когда между любыми $a < b$ можно вставить не одну, а сколько угодно точек $x \in (a, b)$. Для таких моделей существен ответ на топологический вопрос: связен ли интервал (a, b) при произвольных $a,b \in L$? Исторически такой вопрос был впервые сформулирован в виде аксиомы Дедекинда о непрерывности. Продолжая исследовать возможности (существует ли бесконечно малые или их нет? Имеются ли ординалы или их нет?), мы в итоге приходим к двум основным моделям: либо модель из примера 2.2.1 с бесконечным множеством всех вещественных чисел **R**, либо модель из следующего примера.

Пример 2.3.1. Множество всех вещественных чисел, рассматриваемое по модулю единица, есть L. Отношение “$\prec$” определяется для тех пар чисел $x, y \in R$, для которых x <€y и $y-x < 1/2 \pmod 1$.

И в примере 2.2.1, и в примере 2.3.1 сами значения чисел $x \in$ **R** не важны: в первом случае все рассматривается с точностью до упорядоченных гомеоморфизмов (преобразование $f: R \mapsto R$ при единственном условии x <€y $\Leftrightarrow$ f(x) <€f(y)), а во втором — с точностью до ориентированных гомеоморфизмов.

Про гомеоморфизмы здесь можно говорить, потому что интервальная топология для линейно упорядоченного множества очень хороша (отделима) и все топологические конструкции становятся применимыми.

Линейно упорядоченная модель содержательно интерпретируется как “темпоральный поток”, как “время само по себе”. Мы не имеем ничего внешнего, что бы датировалось этим временем (т.е. ничего, кроме множества L). Мы мыслим себе лишь набор событий с предписанным переходом (ориентацией) от более раннего к более позднему — и только. Согласно Бергсону время есть чистая длительность, и именно это моделируется линейно упорядоченной моделью. Движемся ли мы психически, переходя ко все более поздним событиям, все время к *новым* событиям, или же к тому, что уже *было когда-то* — это второстепенная подробность сравнительно с линейным, не уходящим в сторону, не ветвящимся и не прерывающимся процессом мысленного движения. Важно, что чистая непрерывная (технически “связная”) длительность, лишенная пространственной протяженности, эксплицируется линейно упорядоченной структурой. Мысленный переход от более раннего события (событий) к более позднему (поздним), который иногда передается неточной и избыточной фразой “переход от прошлого к будущему”, есть чисто умозрительный переход *в рамках этой понятийной структуры*. Обратим внимание, что при циклической структуре прошлое, настоящее и будущее *не* исчерпывают всего линейно упорядоченного цикла. Мистификация этого умозрительного перехода как чего-то совершающегося “в природе”, “в реальности”, “независимо от познающего субъекта” приводит к гипостазированию (субстанцификации) “течения времени”. Этим объясняется, что в некоторых своих работах я называл такое время “субстанциальным временем”, отождествляя “субстанцию” и “множество”. Но даже при таком названии реляционность в понятии времени остается — оно базировано на отношении рода порядка. Без этого отношения ничего в приведенной дефиниции для $(L,<)$ сформулировать невозможно.

2.4. Время в универсуме

Субстанциальное время есть самодовлеющее нечто, никак не связанное с “внешними событиями”. Моделируя последние некоторым другим множеством U и называя это множество “универсумом”, мы дадим другую, более сложную конструкцию, которую также можно интерпретировать как темпоральную характеристику, но уже для универсума. Исходя из принятой нами концепции о связи ярлыка “время” с отношением “раньше-позже”, мы будем считать, что в универсуме U задано некоторое отношение рода порядка (“$<$”, “$\leq$“ или “$\prec$”), которое обозначим “$\precsim$”. Если бы речь шла о множестве U, не оснащенном отношением порядка, то терминология, связанная со временем, едва ли была бы приемлема.

Определение 2.4.1. *Будем говорить, что отображение* $f: (U, \precsim) \to (L, \prec)$ *есть функциональное время, если* $(L, \prec)$ *есть линейно упорядоченное множество, а из* $x \precsim y$ *следует* $f(x) \prec f(y)$ *для любых* $x,y \in U$.

Технически говоря, f есть *возрастающая* (изотонная) функции, иначе *морфизм упорядоченной структуры*. Содержательно это означает, что мы признаем свое умозрительное направление перебора событий $(L, \prec)$ за время, описывающее внешние нам события, т.е. происходящие в каком-то постороннем универсуме (физическом, биологическом, геологическом), если и только если ранние относительно порядка в универсуме события окажутся более ранними и в нашем упорядочении $(L, \prec)$.

Здесь возможен частный случай (наиболее распространенный), когда само L мыслится содержащимся в универсуме U и упорядочения совпадают “$\precsim$” и “$\prec$”, тогда верна следующая формула

$$\forall x,y \in U \; x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y). \tag{2.4.1}$$

В определении указано $\to$, а не $\mapsto$. Это не случайная описка. Мы имеем в виду отображение из U в L. Область задания $\mathrm{dom}\, f$ отображения f может не совпадать со всем универсумом U, т.е. допустим случай,

$\mathrm{dom}\, f \subsetneq U$. Точно так же иногда образ $f(U) \subsetneq L$. В дальнейшем, говоря о функциональном времени, будем всегда писать вместо произвольно взятой буквы f букву t. Случай $t(U) \neq L$ означает, что мы выбрали время L, которое избыточно для описания данного универсума. Например, мы приняли за L *всю* числовую прямую **R**, а все рассматриваемые нами психические процессы умещаются на отрезке длиной в сотню лет. Наиболее ярок пример современной физической космологии. Она исходит из представлений о времени как о заданном на оси $(-\infty, \infty)$, тогда как все ее модели умещаются на полуоси $(0, \infty)$ а точка ноль вообще не влезает ни в одну физическую модель без сингулярности. Особенно существенно различие между $t(U) = L$ и $t(U) \neq L$ для случая, когда $(L, \prec)$ взято замкнутым. Тогда $t(U) \neq L$ означает, что мы взяли $(L, \prec)$ замкнутым напрасно — для данного универсума *можно* обойтись линейным временем. Случай $t(U) = L$ означает, что нами выбрано время без избыточности.

Хуже, когда $\mathrm{dom}\, t \neq U$. Это означает, что время L не является *глобальным для данного универсума временем*. Имеются события, которые не охватываются нашим временем t, т.е. события $x \in U$ без темпораты $t(x) \in L$. Конечно, такое может произойти просто из-за неудачного выбора отображения $t\colon U \to L$, возьмем другое — и каждое событие будет иметь темпорату. Но может случиться — и примеры тому известны, — что $(U, \prec)$ таково, что *нельзя* выбрать $L \subset U$ и $t\colon U \mapsto L$ с сохранением порядка глобально. Это означает, что могут существовать универсумы, не допускающие глобального (“единого”) времени. Познавательно это влечет за собой, например, запрет разговаривать об энтропии в таких универсумах — ведь энтропия есть функция, возрастающая с течением времени, а если самого времени задать нельзя, то нельзя и говорить про функцию от него.

Таким образом, мы говорим о времени, когда мы весь многоразличный мир с его пространственными, гравитационными, электрическими, метаболическими, почвенными, генетическими, химическими, психическими, нравственными, магическими характеристиками *проектируем на одну линейно упорядоченную ось*. Не всякое такое проектирование имеет касательство ко времени, например, на ось абсцисс можно спроектировать “толщину”. Лишь проектирование, сохраняющее отношение “раньше”, касается словоупотребления “время”.

На втором, дифференциально-топологическом уровне изучения функциональное время выступает как функция, градиент которой положителен (т.е. в касательном пространстве направлен в будущее).

2.5. Датировка событий

Имея время $(L, \prec)$ в универсуме U, мы можем сопоставлять событиям $x \in U$ "даты" двояко — как *мгновенные даты* (темпораты) и *топологические даты* (интервалы).

Определение 2.5.1. *Темпоратой* t_x *события* $x \in U$ *в темпоральном потоке* $(L, \prec)$ *относительно функционального времени* $t\colon U \to L$ *называется значение* t *на* x, *т.е.* $t_x = t(x)$.

Чаще всего пользуются именно темпоратами, причем L отождествляется с $\mathbf{R}$ (последним отождествлением мы займемся ниже). Темпората, особенно числовая, крайне удобна в обращении. Но при этом следует иметь в виду, что сама по себе функция t в высшей степени произвольна, ее можно заменить другой $\tilde{t}$ с теми же свойствами изотонности, но с другими значениями. В частности, для одной и той же пары событий может оказаться $t_x = t_y$, но $\tilde{t}_x \neq \tilde{t}_y$.

Определение 2.5.2. *Будем говорить, что события* $x, y \in U$ *одновременны относительно функционального времени* t, *если* $t_x = t_y$.

Таким образом, относительно разных функциональных времен одна и та же пара событий может быть то одновременна, то нет. Так возникает желание найти *уникальную* функцию T, которая выделялась бы изо всех прочих мыслимых возрастающих $t \in L^U$ какими-нибудь приемлемыми признаками, только эту функцию принять за *настоящее время в универсуме*, а прочие перечеркнуть как измышления. Альтернативное направление мысли — принять как равноправные *все* (или почти все) допустимые $t \in L^U$ и не придавать никакого содержательного значения равенству темпорат $t_x = t_y$, считать, что равенство это неинвариантно, а потому никакого познавательного значения не имеет. В специальной теории относительности господствует вторая точка зрения, а в ньютоновой физике и в современной физической космологии — первая. Математически результат зависит от исходного способа упорядочения в универсуме, и имеется такой способ упорядочивания (называемый *ньютоновым упоря-*

дочением), при котором желанная функция T существует и определяется в известном смысле однозначно (см. п.3.1, 3.2)

Определение 2.5.3. *Интервальной датой* $(a,b)_x$ *события* $x\in U$ *в темпоральном потоке* $(L,\prec)$ *называется*

$$(a, b)_x = L \cap (p, q),$$
$$p, q\in L \ \&\ x\in (p,q). \qquad (2.5.1)$$

Раскроем содержание определения. Пусть $x\in U$ — произвольное событие. Найдем на L пару событий p, q, в какой-то мере "датирующих" x, именно, следующим образом: $x\in (p, q)$. Это грубая датировка, указывающая, что x позднее p и раньше q. Кстати, может случиться, что уже и она невозможна, тогда $(a, b)_x =€\varnothing$. Но если такие события $p, q\in L$ нашлись, то интервал темпорального потока $L\cap(p, q)$ может подвергаться уточнению, т.е. уменьшению. Именно, внутри него могут найтись p', q' такие, что сохраняется $x\in (p', q')$. Продолжая неограниченно уменьшение этого интервала, придем либо к тому, что пределом (пересечением) всех таких интервалов окажется единственное событие a, тогда $(a, b)_x$ =€a, либо предельным будет снова интервал $(a, b) \cap L$ темпорального потока $(L, \prec)$, тогда $(a, b)_x = L \cap (a, b)$.

Случай, когда $(a, b)_x = \varnothing$, отвечает варианту отсутствия глобального времени. Случай, когда для всякого события $x\in U$ интервальная дата сводится к единственной точке, в точности отвечает тому, что мы называли "ньютоновым упорядочением универсума". Наконец, последний случай "размазанной" даты — это те трудности в изучении темпоральных явлений, которые возникли в связи с теорией относительности. Самое существенное в понятии "интервальной даты" именно то, что во многих распространенных моделях с ярлыком "время" датировать событие инвариантно невозможно иначе, как *размазав* его по целому интервалу. Ведь согласно определению 2.5.3 в интервальной дате не фигурирует никакого функционального времени, т.е. $(a, b)_x$ инвариантен относительно выбора $t\in L^U$ (но не $L\subset U$). За инвариантность приходится платить размазанностью[1]. Надо иметь в виду, что размазываются *только* те явления (собы-

[1] Отметим, что эта размазанность не имеет никакого касательства ни к теории "нечетких множеств", ни к "неустранимому шуму всякого сигнала".

тия), которые случаются *вне* самого темпорального потока ($x \in U \setminus L$), поэтому, например, эксперименты А.А.Кроника и Е.И.Головахи (Головаха, Кроник, 1984) сюда не относятся — они совершаются в психическом времени подопытного субъекта. Важно также и то, что все модели такого размазывания датировки связаны так или иначе с идеей близкодействия.

Критерием того, что $L \subset U$, можно выбрать за глобальный темпоральный поток, допускающий интервальную датировку универсума (U, $\prec$), служит

$$U \subset \cup\{x \mid a \prec x \prec b \;\&\; a \prec b \;\&\; a, b \in L\}. \qquad (2.5.2)$$

2.6. Численная датировка — часы

С линейно упорядоченной структурой (L, $\prec$) можно ассоциировать числа в общем случае с помощью отображения τ: (L, $\prec$) $\to$ ($\mathbf{R}$, $<$) (с сохранением порядка, конечно), а чаще всего прямым отождествлением L с $\mathbf{R}$ и их порядков. Конечно, не существует “единственно верного” способа сопоставлять событиям число. Всякий такой способ сопоставления

$$(U, \prec) \xrightarrow[t]{} (L, \prec) \xrightarrow[\tau]{} (R, <) \qquad (2.6.1)$$

называется *часами*, при $x \prec y \Rightarrow \tau \circ t(x) < \tau \circ t(y)$.

Самое большое удобство ньютонова упорядочения заключается в том, что при нем *можно* по существу *обойтись одними единственными часами* (ср. п.3.3). Технически говоря, это связано с тем, что в этом упорядочении бинарное отношение “события x и y имеют одну и ту же интервальную дату (совпадающую с единственной точкой)” оказывалось отношением эквивалентности, согласующимся с предзаданным порядком универсума, факторизация по этому отношению эквивалентности-одновременности приводит к линейно упорядоченному множеству, т.е. к (L, $\prec$) в (2.6.1).

На втором уровне изучения (в том же ньютоновом упорядочении) все одновременные точки образуют слой — гиперповерхность, на которой метрика вырождается, и вместо римановой или псевдоримановой геометрий приходится вводить полуриманову (на третьем уровне соответственно полуевклидову) геометрию.

О п р е д е л е н и е 2.6.1. *Промежутком времени между событиями* $p \prec q$ *из универсума* U *относительно часов* τ *называется при ньютоновом упорядочении число* $\tau(q) - \tau(p)$.

Если на линейно упорядоченном L заданы двое часов $\tau\colon L \to R$ и $\tilde{\tau}: L \to R$, то можно говорить о реградуировке часов $\tau \circ \tilde{\tau}^{-1}\colon R \to R$, причем эта функция тоже всегда будет возрастающей. По-видимому, первым, кто глубоко задумался над проблемой реградуировки, был Пуанкаре, хотя он предпочтительнее обсуждал ее в терминах пространства, а не времени. Четче всего эту проблему сформулировал и по-своему решил Милн. Правда, поставил он ее в стандартно-мистифицированной форме. Он задался вопросом, какая шкала времени *правильная* — та ли, в которой за равные промежутки времени распадаются равные *доли* радиоактивного материала, или же та, в которой за равные промежутки времени распадаются равные *массы* (веса) радиоактивного материала? Так как в первой шкале распад массы происходит по экспоненциальному закону, то, если значение времени в одной шкале обозначить t, в другой оно выразится в виде $\tau = €_0 \log(t/t_0)$ (где t_0 и τ_0 суть размерностные константы). Какая же из этих двух шкал “правильная”? Математически речь идет не о том, “какая шкала правильная” или “какая правильнее”, а о возможности умозрительно отличить одну от другой, об их инвариантных признаках, если они есть. Милн рассмотрел физические последствия перехода от одной шкалы к другой, нам удобнее будет подробнее взглянуть на его разбор в одной из следующих рубрик (см. п.3.2). Подобный же логарифмический переход встречался в те же десятилетия у Бакмана в биолого-экологических исследованиях.

Отметим, что с познавательной точки зрения переход к другой шкале через логарифм чудовищен. Он меняет *качественные* представления, то, что выглядело *конечным* (промежуток от нуля до t_1), делается *бесконечным* (полупрямая от $-\infty$ до τ_1). По ломке стереотипов этот переход соответствует трудности перехода в измерении радиоактивности, предложенного Милном, — измерять время не долями распавшегося вещества, а его граммами. Другой такой же трудности пример перехода от бесконечного к конечному в физике доставляют “черные дыры”: свободно падающая к черной дыре материальная точка достигнет ее по своим часам за *конечный* отрезок времени, тогда как по часам любого внешнего, не падающего в дыру наблюдателя (и с позиций единого мирового времени этого решения Шварцшильда) для падения на границу черной дыры требуется *бесконечно много* времени. Поэтому неясно, как могут быть одинаковы физические законы у тех, кто между одними и теми же событиями проживает столь различные промежутки времени.

Имеются и не столь разительные градуировки, например, в релятивистской космологии естественен (см. п.3.1) переход по формуле

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{R(t)}, \tag{2.6.2}$$

где $R(t)$ — известная в космологии функция. В большинстве моделей она такова, что при этом конечным отрезкам отвечают конечные же (т.е. интеграл сходится в нуле), никаких бесконечностей не возникает. Однако и при этом изменения хронологической шкалы в космологии оказываются настолько сильными, что совершенно меняют содержание физической космологии.

В ньютоновой физике с реградуировкой часов справлялись (до Пуанкаре) следующим образом. Да, в кинематике, действительно, любое преобразование темпораты $t \to t'$ (точнее, $R \to R$) законно, и нет никаких резонов предпочитать одну градуировку другой. Но уже в динамике из уравнения $d(mv)/dt = F$ видно, что при реградуировке проявился бы коэффициент при силе $d(mv)/d\tau = F dt/d\tau$, а этого нет, следовательно, *динамическое время* выделено однозначно (с точностью до масштабного множителя и аддитивной постоянной). Но конвенциалист Пуанкаре возразил, а почему бы не допустить, что мы неправильно градуируем силы, что этот самый коэффициент $dt/d\tau$ и есть поправка на силу?.. Ходом перестройки физических воззрений в XX веке это возражение было задвинуто, но ответа на него до сих пор нет. Другой способ устранения реградуировки отмечен в п.3.3.

2.7. Точечный наблюдатель и система отсчета

Операция, в некотором смысле “обратная” операции проектирования всего универсума на линейно упорядоченное время L, заключается в инъектировании этого линейно упорядоченного времени L в универсум U.

Определение 2.7.1. *Точечным наблюдателем* L *в универсуме* U *при данном линейно упорядоченном времени* $(L, \prec)$ *называется изотонное отображение* $\gamma\colon L \mapsto U$*, в частности, в качестве* L *могут* *быть взяты часы* R. *Само* L *есть образ* L *при отображении* $L = \gamma(L) \subset U$.

В литературе отображению $\gamma\colon [0,1] \mapsto (U,\prec)$ присваивают различные наименования — “материальная точка”, “мировая линия материальной точки”, “мировая линия наблюдателя”, “изотонная кривая”, “изотонный путь”. На дифференциально-топологическом уровне рассмотрения появляются термины “временноподобная”, “кривая с положительным касательным вектором”, даже “временноподобная геодезическая”. На третьем уровне рассмотрения наиболее встречающиеся термины — “инерциальная частица”, “временноподобная прямая”. При точной формулировке всех дефиниций приходится вспомнить про реградуировку и различать “путь” от “кривой” (фактор-множество всех путей по отношению изотонной реградуировки-репараметризации).

Содержательно это означает, что носитель самодовлеющего времени, т.е. чистой длительности, мыслимым актом переносит такую же длительность на описание всех явлений-процессов вне себя. Живя здесь, на Земле, я полагаю, что на Сириусе (упрощенном до точечного объема и соответственно обесструктуренном) собственно время течет так же, как у меня (тут речь не о “скорости”, не о градуировке часов, о чем см. п.2.8, а о линейной направленности и непрерывности). “Существует материальная точка (или точечная частица)” — означает теперь, что нечто, связываемое с этой точкой, длится, и для всякой перемены длительности (возникновение-уничтожение), сравнительно с моей $(L,\prec)$, нужны какие-то конкретные объяснения, причины. Можно, конечно, рассматривать не одного наблюдателя, а систему наблюдателей.

О п р е д е л е н и е 2.7.2. *Системой отсчета* W *в универсуме* $(U, \prec)$ *с линейным временем* $(L, \prec)$ *называется такое множество* W *точечных наблюдателей в этом универсуме при этом времени, для которого справедливо:*

1) *объединение образов всех наблюдателей заполняет открытую область* $V \subset U$, т.е. $V = \cup\{\gamma(L) \mid \gamma\in W\}$;

2) *образы двух разных точечных наблюдателей из* W *не пересекаются, т.е.* $\forall\gamma_1, \gamma_2\in W\ \neg\exists\ t_1,t_2\in L\ \ \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.

На геометрическом языке такое семейство кривых называется иногда “конгруэнцией”. На втором, дифференциально-геометрическом уровне изучения это определение системы отсчета превращается в следующее: ”Система отсчета есть невырожденное временноподобное векторное поле в области". Говорят также про "ток вещества", "поток", " ток материальных частиц". На третьем уровне чаще всего система отсчета сводится к полю параллельных прямых. В этом случае избыточно говорить о "поле", о "конгруэнции", поскольку заданием одной прямой вся система отсчета задается однозначно. Поэтому обычно в этом случае вместо "система отсчета W" говорят "наблюдатель γ", имея в виду $\gamma \in W$. Но иногда бывают и другие системы отсчета даже на третьем уровне, с чем мы вскоре встретимся подробнее.

Не задерживаясь на вопросах, связанных с репараметризацией системы отсчета и с согласованием отображений $\mathbf{R} \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{t} \mathbf{R}$, остановимся на разнице между "системой отсчета" и "системой координат", что зачастую путается. На втором уровне, где вместо множества можно говорить о гладком многообразии, каждому событию сопоставляются координаты $x = (x^1, \ldots, x^n)$ в некоторой карте. Математически карты совершенно произвольны, и в другой системе координат связь между старыми и новыми координатами вполне произвольна

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \\ \ldots \\ y^n = f^n(x^1, \ldots, x^n), \end{cases} \tag{2.7.1}$$

лишь бы функции $f^1, \ldots, f^n$ были дифференцируемы. Для системы отсчета независимо от координатного произвола выделяется конгруэнция кривых, выбираемая в качестве первой темпоральной координатной линии. Факторизация по этому слою приводит к $(n-1)$-мерной базе расслоения, и допустимые преобразования координат теперь имеют вид

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ y^2 = f^2(x^2, \ldots, x^n), \\ \ldots \\ y^n = f^n(x^2, \ldots, x^n). \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Попутно отметим, что для случая ньютонова упорядочения, где имеется $(n-1)$-мерный слой одновременных событий, а база расслоения одномерна, допустимые координатные преобразования вместо (2.7.1) принимают вид

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1), \\ y^2 = f^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \ldots \\ y^n = f^n(x^1, x^2, \ldots, x^n). \end{cases} \qquad (2.7.3)$$

И случаю (2.7.2), и случаю (2.7.3) на дифференциально-геометрическом уровне отвечает так называемая полуриманова геометрия (риманова геометрия с вырожденным на слое метрическим тензором — так ее можно приблизительно обрисовать) V_n^{n-1} и V_n^1 соответственно (Пименов, 1968).

2.8. Преобразование времени у конкретного объекта

Уже в механике, а тем более в биологии и психике, иногда целесообразнее рассматривать объект как структурированный, составной, а не как точечный. И в этом случае полезно бывает пользоваться линейным (хронологическим) временем, относя его к чему-нибудь вроде "центра масс". Но при этом этот сложный объект может еще выдавать характеристику размерности времени (например, ходики с "не так" подвешенным маятником, скорость протекания метаболических реакций, физиологические признаки вроде вырастания бороды у человека). Пусть A — символическое (операторное) описание нашего объекта, α — совокупность некоторых параметров, а f — некоторая функция от всех этих переменных и от хронологического времени t. Тогда, вообще говоря,

$$\theta = \int f(A, \alpha, t)\,dt \qquad (2.8.1)$$

есть некоторое преобразование времени, которое иногда интерпретируется как собственное, "биологическое" время биологического объекта A в условиях α. Такой подход позволяет снять противоречие, усматриваемое иногда между "биологическим" временем и "физическим" временем — "биологическое время" предстает как преобразованное воздействием организма A хронологическое время (которое порой отождествляется с физическим). Эти A-преобразования относятся не только к биологическим объектам, но и к объектам физическим. Скажем, измеряют физиологическое время объемом прошедших физиологических процессов и в этой связи говорят порой, что “время во сне течет иначе, чем в состоянии бодрствования”. С точки зрения A-преобразований этот способ выражения аналогичен такому: время для чайника будем мерять объемом вскипевшей воды, а наблюдения за зависимостью этого объема от напряжения электроэнергии у включенной электроплитки позволят сказать, что время у чайника течет по-разному для 200 A и 230 A.

Эти A-преобразования осуществляются исключительно вдоль мировой линии объекта A, только там $t \to \theta$, в окружающем универсуме не затрагивается ничего.

В принципе оператор A может быть таким, что при некоторых положительных t давать θ отрицательное значение. Такая интерпретация подходит к экспериментам А.А.Кроника и Е.Е.Головахи (Головаха, Кроник, 1984) с “перепутыванием листков календаря”, если интерпретировать A как “оператор забывания”, “оператор невнимательности”, “оператор нечеткости словесного выражения”. Оператор A может давать и периодические A-преобразования. Они иногда приводят к словоупотреблению “цикл”, “ритм” (Ритм пространства и времени..., 1974) и трактуются порой как пример “замкнутого времени”. Вряд ли последнее целесообразно. Например, если θ измеряется по pH-шкале, то четким примером такой “цикличности”-периодичности является кислотность во влагалище — от высокой кислотности к нейтральному положению с последующим повышением щелочности, затем овуляция и период начинается сначала. Но при этом организм хранит память о всех предшествовавших периодах, так что нет оснований заменять линейное время на замкнутое.

В принципе A-преобразования — частный случай реградуировки часов $f\colon R \to R$, но там царил полный произвол, а тут мы имеем дело с $f_A\colon R \to R$. Эта зависимость реградуировки от конкретного оператора A порождает совсем иные чувства к реградуировке. В первом случае она предстает как стихийная помеха, от которой не знаешь, как избавиться, а во втором она выглядит “объективным” результатом воздействия объекта, который и которое надо изучать и есть надежда разобраться.

Отношение $d\theta/dt$ естественно называть “скоростью физиологического процесса у объекта A по отношению к хронологическому времени”. Надо всегда помнить, что “скорость” есть двухместный предикат (а иногда и трехместный), и выражения “скорость” или “скорость того-то” не полны.

2.9. Константы размерности времени

Завершая этот параграф, сделаем замечание, которое к нему не относится, но которое из-за своей тривиальности зачастую забывается, порождая отвлекающее направление мысли. В некоторых пространствах признаков (преимущественно в физическом пространстве) выполняется уравнение $Ax = \lambda x$, которое означает, что λ является “собственным числом” оператора A. Очень нетрудно сделать, чтобы константа λ при этом имела физическую размерность времени, например, если λ — длина волны, то, разделив ее на скорость света, получим требуемое. Эти “собственные значения времени” имеют лишь внешнее, несущественное отношение к проблеме времени, хотя с помощью таких собственных значений иногда бывает удобно описывать систему.

§3. Несводимые к линейным структуры

3.1. Отношение одновременности

Сама проблема определения одновременности возникает как трудная только тогда, когда мы от рассмотрения времени как чего-то самодовлеющего выходим на рассмотрение универсума, различающегося еще иными, нежели темпоральные, признаками (в физике — пространственно-временны́ми, в биологии — таксономическими, серологическими или иными, о чем см. п.3.5). При этом, если упорядочение ньютоново, то и тут трудной проблемы не возникает, каждому событию x инвариантно и однозначно ставится в соответствие единственное событие l_x в L, множество всех $y \in U$, отображающихся в это $l_x \in L$, и есть множество *одновременных событию* x и *между собой* событий в универсуме. Главное удобство скрывается в добавлении “и между собой”, что означает *транзитивность одновременности*. Без транзитивности одновременность, можно сказать, даром никому не нужна.

В неньютоновом мире все усложняется. И беда в том, что у всех оказываются различные прошлые. Конечно, и в ньютоновом мире для некоторых событий прошлые были разными. Например, для Кая Юлия Цезаря прошлое не совпадало с прошлым Наполеона Бонапарта (в прошлом корсиканца присутствовал еще Карл Великий, которого не было в прошлом Цезаря ни в один миг его существования). Но зато ньютонов мир устроен удобно вот в каком смысле — у каждого мига есть множество одновременных ему мгновений, и любые два мгновения из этого множества имеют одно и то же прошлое. Скажем, если синхронизировать мгновения мое на Земле и моего брата по разуму на Сириусе, то у нас (если упорядочение ньютоново) одинаковые прошлые (и будущие тоже). Про такую упорядоченность в каузальной теории говорят, что "пространство-время каузально неразличимо в прошлом". В неньютоновом же мире (в частности, в теории относительности) как бы ни синхронизировать меня и инопланетян, наши прошлые *всегда будут различными*.

Поэтому всякое определение "одновременности" в неньютоновом случае, которое опиралось бы на понятия "прошлое a^-" события a (или "будущее a^+"), обречено на нетранзитивность, следовательно, на неэффективность. В частности, если бы назвать событие y одновременным событию x при $y \notin x^-$ & $y \notin x^+$ и предполагать транзитивность этого определения, то очень быстро пришли бы к тому, что всякие два события в универсуме одновременны. С этим связана неплодотворность определения одновременности по Роббу, который пытался назвать события одновременными, если они связаны световым сигналом ($y \in \partial x^+$).

Ради преодоления этой трудности придумано логическое усложнение отношения одновременности. Мы говорили, что x одновременно y, подразумевая, что отношение одновременности *двуместно* (бивалентно), является двуместным (бинарным) предикатом. Достижением теории относительности было установление того факта, что *двуместный транзитивный* предикат в неньютоновом мире невозможен для экспликации "одновременности". Для этой цели появились *трехместные* предикаты, именно, говорят, что x одновременно y в системе отсчета W. Удобно рассмотреть обе модификации этого отношения — для инерциальных частиц и для произвольной системы отсчета (на дифференциально-геометрическом и на векторном уровнях рассмотрения).

Для этого сообщим, что когда мы ведем рассмотрение на втором или третьем уровне, можно (отталкиваясь только от отношения порядка "$\prec$") ввести корректно определение *ортогональности*. Именно, можно говорить про гиперплоскость, ортогональную прямой L, и про гиперповерхность, ортогональную конгруэнции W кривых (току вещества).

Уточнениями, когда такие ортогонали *существуют*, мы заниматься в данной статье не будем. Внешне гиперплоскость λ_a, ортогональную времениподобной прямой L в точке a, можно описать в терминах исключительно порядка

$$\lambda_a = \{x \in U | \exists p \exists q \exists L',$$
$$a, p, q \in L' \;\&\; L' \parallel L \;\&\; pa = aq \;\&\; x \in \partial p^+ \cap \partial q^- \}. \qquad (3.1.1)$$

Здесь знак $\parallel$ обозначает параллельность прямых, запись $pa = aq$ означает равенство длин (аффинных) отрезков на L'. Векторная структура неустранимо заложена в этом определении самим понятием “прямая”. Формула (3.1.1) описывает стандартную процедуру радарной синхронизации — сканируемое событие одновременно $a(t_0)$, если промежуток времени, пока радиосигнал шел туда $pa(t_0 - t_1)$, равен промежутку времени $aq(t_2 - t_0)$ его возвращения. Радарное определение одновременности, понимаемое как датирование, является продолжением интервальной датировки по формуле (2.5.1). Сначала мы приписываем событию $x \in U \backslash L'$ “размазанную”, интервальную дату $(p, q)_x$ у наблюдателя L', затем началу p и концу q этого интервала сопоставляем темпораты t_1 и t_2 по часам самого L', а уж потом событию x приписываем темпорату по априорному закону $t_x = (t_2 + t_1)/2$. Априорная необходимость последнего предписания оспаривалась А.Грюнбаумом, который предложил приписывать темпорату по закону $t_x = (1 - \varepsilon)t_2 + \varepsilon t_1$ при $0 < \varepsilon < 1$, но обсуждение этой темы требует многих слов и малопродуктивно (Пименов, 1987).

Определение 3.1.1. *Говорят, что* x *одновременно* y *относительно наблюдателя* L, *если* $x \in \lambda_y$, *где* λ *определена по* (3.1.1).

Определение 3.1.2. *Говорят, что* x *одновременно* y *относительно системы отсчета* W, *если найдутся наблюдатели* γ_1 *и* γ_2 *в* W, *для которых* $x \in \gamma_1 \;\&\; y \in \gamma_2$, *при этом* x *и* y *лежат на одной гиперповерхности, ортогональной конгруэнции* W.

Громоздкость этих определений вызвана самой сущностью дела — неньютоновостью и, следовательно, нелинейностью по существу универсума. Указанная формулой (2.6.2) реградуировка неизбежно возникает, если потребовать, чтобы одновременность в космологии задавалась бы радарным способом по формуле (3.1.1).

В неньютоновых мирах реградуировка часов (см. п.2.6) тесно связана с определением одновременности. В связи с определением 2.5.1 мы уже отмечали, что в одном времени t события x и y могут иметь равные темпораты $t_x = t_y$ ("быть одновременными относительно данного функционального времени"), а в другом $\tilde{t}_x \neq \tilde{t}_y$. Значит, реградуировка часов в неньютоновом случае связана не только с выбором функции $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, но еще и с выбором "поверхности одновременности" в универсуме. Похоже, что Бакман работал в презумпции ньютонова упорядочения, поэтому к нему высказанное соображение не относится. Но Милн работал в неньютоновом упорядочении, поэтому для его результатов существен выбор поверхности одновременности. Нельзя утверждать, будто бы Милн всего лишь меняет шкалу на логарифмическую.

3.2. Два примера к отношению одновременности

Разберем подробнее, что же сделано в этом аспекте у Милна (Milne, 1948). Он рассматривает "взрывную систему отсчета", т.е. ситуацию, когда все материальные точки поначалу находятся в одной точке (пространственной), затем в один миг начинают разбегаться (естественно, со скоростями, не превышающими световую скорость), а затем движутся исключительно по инерции. Если взять одного наблюдателя L из этой системы W, то можно говорить о двух отношениях одновременности — применительно к инерциальной частице (прямой L) можно воспользоваться определением 3.1.1, а применительно ко всей системе — определением 3.1.2. В первом случае множеством одновременных между собой событий будет гиперплоскость, а во втором — сфера (псевдоевклидова), т.е. ортогональное сечение пучка прямых, исходящих из одной точки (рис.4). Темпорату t Милн задает проекциями вдоль плоско-

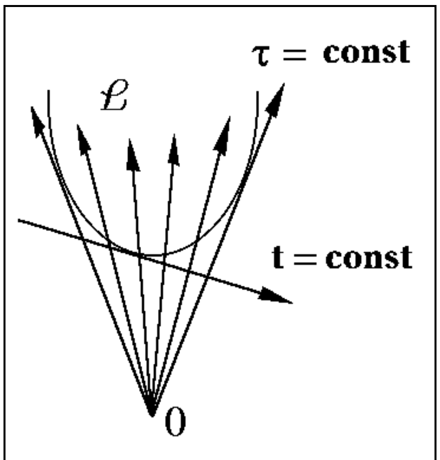

Рис.4

стей, а темпорату τ — проекциями вдоль сфер, лишь после этого он прибегает к логарифмическому переходу. Главное — оперирование *разными* поверхностями одновременности. Именно за этот счет Милну удается показать, что равноправны два воззрения-конвенции. В первой весь мир представляется конечной по объему расширяющейся вселенной, возникшей конечное число лет назад и несущей евклидову геометрию пространства. Другая рисует мир бесконечным в пространстве и во времени, стационарным, где расстояние между галактиками не меняются во времени, а пространство устроено по геометрии Лобачевского, а не Евклида. Важно, что в обоих способах описания присутствует обсервационный факт — "красное смещение спектра", хотя эксплицируется он разными картинами по-разному. Это важный вклад в обоснование конвенциализма, и не следует его компрометировать неточными изложениями, сводя все будто бы к изменению шкалы на логарифмическую.

Сам Милн не занимался рассмотрением вопроса, а как сработала бы его теория, кабы подлежащий универсум был упорядочен по-ньютоновски? Оказывается, что значительно уменьшилась бы парадоксальность результата, но некоторая неожиданность сохранилась бы. Дело в том, что при ньютоновском упорядочении на векторном уровне сфера совпадает с плоскостью ("полуевклидова геометрия"), поэтому остается почти один лишь логарифмический переход, как у Бакмана. Возможны два воззрения-конвенции — в первой весь мир представляется бесконечной по объему евклидовой вселенной, возникшей конечное число лет назад и равномерно расширяющейся, во второй — мир бесконечен по объему, неевклидов, но стационарен и вечен.

Другой пример у нас будет геологическим. Иногда отношение одновременности словно бы *навязывается самой природой изучаемого объекта*, скажем, слой (страты) в геологии. То, что встречается в одном и том же, явно не смещенном и без следов перемешивания слое, хочется назвать — и называют — *одновременным*. И тогда возникают трудности вот какого рода. В последовательных слоях находятся как геологические остатки, так и биологические. По ним идет датировка, отдельно геологическая, отдельно биологическая. В нашей терминологии универсум снабжается двумя часами t_g и t_b:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "t_g"'] \arrow[dr, "t_b"] & \\ R \arrow[rr, leftrightarrow, "?"] & & R \end{tikzcd} .$$

Но вот порой между показаниями этих двух часов нет соответствия, т.е. нет сохраняющего порядок перехода от показаний геологических часов к показаниям биологических (Ритм пространства и времени..., 1974). Иногда оказывается, что $t_g(p) < t_g(q)$, но $t_b(p) > t_b(q)$. Как эксплицировать это обстоятельство? Мы проследим сначала логику авторов названной книги, которая приводит их к мысли рассматривать неньютоновы упорядочения.

Заострим пример. Рассмотрим одного человека и возраст его будем мерять в одних часах числом изношенных им рубашек, а в других часах — числом его встреч с милиционером. Может ли случиться, что в момент p он износил 500 рубашек и 11 раз встретился с милиционером, но в момент q он износил уже 550 рубашек, а с милиционером встретился всего 9 раз? Нет, решительно ответим мы. Это противоречило бы логике, арифметике. А может ли подобное встретиться в стратиграфии? За счет чего? Если бы компоненты слоя представляли собой итог *линейно упорядоченного* процесса (как взятый нами человек), то и в стратиграфии быть такого не могло бы, ошибкой следовало бы счесть эмпирические данные. “Наблюдатель” линеен. Но если мы мыслим образование слоя как итог *многих* линейных процессов (“ток вещества” из п.2.7), то открываются новые логические возможности. Имеется остаток какой-то ракушки p, который датируется $t_g(p)$ геологически, и ракушки p', датируемой $t_b(p')$ биологически; имеется отпечаток лепестка q, который датируется $t_g(q)$ геологически, и отпечаток q', датируемый $t_b(q')$ биологически. При этом p и p' одновременны и q и q' одновременны также. Может ли при этом случиться

$$t_g(p) < t_g(q) \;\&\; t_b(p') > t_b(q')? \qquad (3.2.1)$$

При ньютоновом упорядочении, когда $t_b(p') = t_b(p)$ и $t_b(q') = t_b(q)$, такого по-прежнему случиться не может (без впускания в теорию противоречия). А вот при эйнштейновом упорядочении $t_b(p)$ и $t_b(p')$ уже не связаны непременно равенством, если p и p' одновременны, то же относится к $t_b(q)$ и $t_b(q')$, поэтому конъюнкция (3.2.1) вполне возможна. По сути на этом основании (хотя их аргументы выражены не так) К.В.Симаков (Симаков, 1982) и отчасти С.В.Мейен (Мейен, 1982) склоняются к допущению, будто бы в экспликации эмпирической стратиграфии надо пользоваться моделями специальной или даже общей теории относительности, имея в виду не только зоны недостижимости сигналом, но даже эффекты искривления пространства-времени.

Логически такие допущения непротиворечивы. Но сразу нуждаются в оговорках. Во-первых, тогда уже нельзя говорить о двухместной одновременности, а следует слой понимать как множество одновременных между собой *относительно какой-то системы отсчета* геобиологических находок. Пока в явном виде такая система отсчета не называется, обращение к релятивистским моделям некорректно. Во-вторых, малые размеры изучаемых областей при громадной скорости света делают трудно понимаемым, откуда берутся так надежно наблюдаемые отклонения от ньютоновости?

Нам кажется, что A-преобразования (п.2.8) проще эксплицируют ситуацию. События p и q расположены на мировой линии объекта ("таксона" по Мейену) A, а события p' и q' — на мировой линии таксона B. По формуле (2.8.1) "свое собственное" геологическое время для p и q имеет значения $\theta_g(A, t_1)$ и $\theta_g(A, t_2)$, соответственно биологическое $\theta_b(A, t_1)$ и $\theta_b(A, t_2)$. Аналогично для объекта B. Нет ничего удивительного, что среди четырех чисел $\theta_g(A, t_1)$, $\theta_g(B, t_2)$, $\theta_b(B, t_1)$ и $\theta_b(A, t_2)$ могут встретиться самые разные неравенства, хотя бы и выполнялось $t_1 < t_2$. В частности, возможно $\theta_g(A, t_1) < \theta_g(A, t_2)$ при $\theta_b(B, t_1) > \theta_b(A, t_2)$. В терминах поясняющего примера это выглядит так: один человек мог износить 500 рубашек и повстречать милиционера 11 раз за то же самое календарное время, за которое другой человек носил 550 рубашек, повстречав милиционера всего 9 раз, и оба попали в одну братскую могилу.

3.3. Метрика как промежуток собственного времени

Одна из распространенных небрежностей словоупотребления в "проблеме времени" заключается в том, что слово "время" иногда употребляется как название объекта (“одноместное отношение”), а иногда как название функции одного переменного (значение времени t в данном событии x, т.е. двуместное отношение, иначе унарная операция), а иногда как название функции от двух переменных (“промежуток времени τ, протекший между событиями p и q”, как отмечалось в связи с определением 2.2.1, такое число называют иногда “интервалом”). Это последнее значение “собственного времени” иногда кладется в основу построения всей кинематики.

В классической, ньютоновой упорядоченности этот промежуток строится следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, "t"] & L \arrow[r, "\tau"] & R \arrow[dr] & \\
U \times U \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & & & R. \\
 & U \arrow[r, "t"] & L \arrow[r, "\tau"] & R \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Мы имеем отображение t универсума на линейно упорядоченное время t: $U \mapsto L$. Если мы захотим говорить о функции двух переменных p, $q \in U$, то нам надлежит образовать произведение $U \times U$ и тогда получим $t \times t$: $U \times U \mapsto L \times L$. На линейно упорядоченном множестве $(L, \prec)$ (см. п.2.3) задана каким-то образом темпоральная шкала, градуированы часы τ: $L \mapsto R$ (см. п.2.5). Суперпозиция отображений t и τ с последующим вычитанием $\tau \circ t(q) - \tau \circ t(p)$ дает возможность приписать паре $(p, q) \in U \times U$ одно вещественное число, обозначаемое $\tau(p, q)$. Так происходит ступенчатый переход $U \times U \mapsto L \times L \mapsto R$. Хорошие свойства ньютоновых часов обеспечивают замечательную простоту такого промежутка времени между событиями

$$\tau(p, q) + \tau(q, r) = \tau(p, r). \tag{3.3.1}$$

Обратим внимание, что для случая циклического времени эта формула должна пониматься локально.

Из-за трудностей и неоднозначностей с выделением $(L, \prec)$ в $(U, \prec)$ применительно к неньютонову миру стали рассматривать прямое отображение τ: $U \times U \mapsto R$, минуя промежуточное линейно упорядоченное множество и операцию вычитания. Такое сопоставление стали называть *метрикой*, а результат сопоставления — *собственным промежут-*

ком времени, противопоставляя "несобственному" координатному. На дифференциальном уровне изучения вторые производные от τ получили название *метрического тензора*.

Для наших целей совершенно излишне входить в описание того, что такое "метрический тензор". Во-первых, все, что специфично для неньютонова случая, можно описать на первом, теоретико-множественном уровне рассмотрения, не опускаясь на второй, где только и живут тензоры. Во-вторых, даже на дифференциально-геометрическом уровне вполне можно обойтись без тензоров как первичных, без постулирования метрики как квадратичной формы. Дело в том, что для неньютонова упорядочения самое главное в том, что там нельзя обойтись *одними* часами (в случае, если число измерений пространства-времени больше единицы, скажем, равно четырем). В эйнштейновом случае всегда присутствуют *четверо* функционально независимых часов. И вот оказывается, что из постулирования существования именно четырех функционально независимых часов *следует* существование нужного метрического тензора, при этом однозначного с точностью до множителя.

Вернемся к функции $\tau(x,y)$, т.е. $\tau\colon U\times U \mapsto R$. Прежде всего, для того чтобы можно было говорить о "промежутке *времени*", эта функция должна быть морфизмом рода порядка, т.е.

$$p \prec q \Leftrightarrow \tau(p, q) > 0, \tag{3.3.2}$$

а на парах $p,q\in U$, не связанных отношением порядка "$\prec$", эта функция либо не определена вообще, либо тождественный ноль, либо чисто мнимое число, либо тождественно $-\infty$ (бывают разные варианты определения). Во-вторых, на τ налагается одно специфическое условие

$$(p \prec q \prec r \;\&\; p \prec r) \Rightarrow \tau(p, r) \ge \tau(p, q) + \tau(q, r). \tag{3.3.3}$$

Это условие "расширяет" равенство (3.3.1) до неравенства, причем в определенную сторону. Если бы вместо (3.3.3) выполнялось обратное неравенство

$$\rho(p, r) \le \rho(p, q) + \rho(q, r), \tag{3.3.4}$$

то говорили бы о *пространственной* метрике, а при неравенстве (3.3.3) говорят о *пространственно-временно́й* (или кинематической) метрике.

На втором, дифференциально-геометрическом, уровне изучения неравенства (3.3.3) и (3.3.4) заменяются соответственно требованиями, чтобы квадратичная форма (метрический тензор) имела бы сигнатуру

(+€ –€...–) или (+€ ±.+) соответственно (во втором случае говорят еще “положительно определенная форма”). На третьем, векторном, уровне рассмотрения те же неравенства заменяются соответственно требованиями, чтобы τ была вогнутой или выпуклой функцией (от векторного переменного на соответствующих областях). Здесь тоже бывают варианты: *риманова* геометрия, когда упомянутый тензор *не зависит от направления*, и *финслерова* геометрия, когда он *зависит* от направления, последняя приспособлена для описания анизотропного пространства-времени. Но мы на этом задерживаться не станем.

Таким образом, ярлыку “время” сопоставляется вполне специфический набор функций среди всех математически мыслимых функций, т.е. удовлетворяющих условиям (3.3.2), (3.3.3). Важно, что выполнение этих условий резко ограничивает всю необъятность respadуировки часов. Поясним на примере. Равенство (3.3.1) есть частный случай неравенства (3.3.3), если выполнено (3.3.1), то все богатство респадуировок сводится к умножению на постоянный масштабный множитель, да аддитивную константу переноса начала отсчета времени. Это, к слову, могло бы послужить хорошим способом введения “настоящего” времени в ньютоновом случае, если бы в этом случае теория строилась не традиционным введением часов на линейно упорядоченном множестве, а аксиоматически через условие (3.3.1). В неньютоновом случае (3.3.3) ограничивает слабее, но все равно до полного произвола $(R, <) \to (R, <)$ не доходит.

Коль скоро введена пространственно-временна́я метрика τ, каждому наблюдателю (материальной точке, см. п.2.7) однозначно сопоставляется числовая мера промежутка времени у этого наблюдателя

$$\mathrm{arcl}(\gamma; 0,1) =$$

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \tau\big(\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i)\big) \Big| 0 < s_0 < s_1 < K < s_n = 1\right\}. \qquad (3.3.5)$$

Коль скоро такая “длина дуги” γ от $\gamma(0)$ до $\gamma(1)$ найдена, среди всех возможных точечных частиц γ выделяются те μ, у которых выполняется условие

$$\mathrm{arcl}\,(\mu;\ p,\ q) = \max_{\gamma}\left\{\mathrm{arcl}\,(\gamma;\ p,\ q)\right\}. \qquad (3.3.6)$$

Такие точечные частицы называются “геодезическими” на геометрическом языке, “инерциальными материальными точками” на физическом языке. Они обладают особо хорошими свойствами, и во многом изучение пространства-времени сводится к изучению поведения именно этих частиц. В частности, с их помощью вводятся такие понятия, как взаимная скорость перемещения двух материальных точек, кривизна области и др. Теоремы о них позволяют моделировать часть эффектов тяготения-отталкивания. И для этого вовсе не обязательно спускаться на более сложный дифференциально-геометрический уровень изучения.

Но для того чтобы какая-то функция двух переменных из универсума могла претендовать на такую роль, предварительно универсум должен быть оснащен структурой порядка “$\prec$”, а затем выполнены условия (3.3.2, 3.3.3). Поскольку ни того, ни другого у А.П.Левича (Левич, 1989, см. также главу настоящей книги) не проделано, не ясно, имеет ли его методика приписывания промежутка “собственного времени” отношение к математической теории. По его методике можно приписывать “промежуток собственного времени” двум состояниям многоуровневого калейдоскопа. Но какое бы число или систему чисел (А.П.Левич мерит промежуток не *числом*, а *набором* чисел, что связано с многоуровневостью его систем, этим затрудняется проверка принципа перманентности, но с этой трудностью еще можно, кажется, справиться) мы ни приписывали разнице двух состояний калейдоскопа, это едва ли относится к проблеме времени.

Существуют разные способы получения τ, нами описан *аксиоматический*. Традиционно метрику τ выводят из некоторого сочетания теоретико-групповых аксиом на линейном уровне рассмотрения с дифференциально-геометрическими на втором уровне. Своеобразен подход Милна, усовершенствованный Уолкером и Шутцем (Schutz, 1973). Милн рассматривает (см. п.3.2) свою систему отсчета W. Каждый наблюдатель $\mathbf{L}$ имеет свои часы, абсолютно независимые от часов других наблюдателей. Но в духе концепций “общественного договора” наблюдатели обмениваются световыми сигналами ∂x^{+} и ищут единое время, которое удовлетворяло бы естественным аксиомам связи между временем родимым и сигнальными функциями. Оказывается, эти аксиомы дают всего два решения: t-время и τ-время, описанные в п.3.2. При этом существенно (чего не отмечают исследователи этой школы), что очень редки те пространства-времена, в которых существует искомое единое время, т.е. в которых упомянутые аксиомы совместны. Оказывается, методы Милна — Шутца работают только в линейном случае (говоря технически, в пространстве-времени нулевой кривизны), но в этом случае метрика находится однозначно.

Другое замечание здесь относится к сочетанию *случайности* с метрикой. Б.С.Флейшман (Флейшман, 1986) совершенно справедливо заметил, что при всяких реальных измерениях метрики физического пространства-времени возникают неустранимые шумы, и пока теория не умеет включать эти шумы в свое рассмотрение, она не может до конца почитаться за обоснованную. К сожалению, именно так обстоит дело в теории пространства-времени. В теории чисто пространственной метрики с условием (3.3.4) Швейтцер и Склар сумели (Schweitzer, Sklar, 1983) построить модель "случайных метрик". Но для пространственно-временнóй τ с условием (3.3.3) построить аналогично "случайную метрику" не удается.

3.4. Обратимость – необратимость времени

Эти неточные слова применяются к двум ситуациям — к замкнутому ("циклическому") времени (см. п.2.3) или к ситуации с нижеописываемыми автоморфизмами. Именно, на уровне векторно-линейного рассмотрения можно рассмотреть преобразования

$$t \to -t,\ \vec{x} \to \vec{x}, \tag{3.4.1}$$

где t — темпората, а $\vec{x}$ — радиус-вектор события. Оказывается, что в огромном числе физические теории *инвариантны относительно преобразований* (3.4.1). Именно, если теория имеет дело с волновыми уравнениями, куда входит $\partial^2/\partial t^2$, то $\partial^2/\partial t^2$ не меняется при (3.4.1). Если теория имеет дело с метрикой $\sqrt{t^2 - \vec{x}^2}$, то эта метрика не меняется при (3.4.1), и т.д. Поэтому часто говорят про "обратимость времени в фундаментальных физических теориях". Так как то время, которое согласуется с эмпирическим материалом, очевидно необратимо, то иногда говорят про драматическое противоречие теории и практики. На деле ситуация не столь драматична. Во-первых, существуют "фундаментальные" физические теории, в которых невозможны преобразования (3.4.1), например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{3.4.2}$$

Оно неинвариантно относительно (3.4.1), поэтому *весь тот эмпирический материал, который зацеплен за явления теплопроводности, не* *может описываться обратимым временем*. Во-вторых, сами автоморфизмы (3.4.1) имеют место на векторно-линейном уровне рассмотрения (третьем в нашем счете, см. п.1.3). Этот уровень отвечает касательному к миру пространству, поэтому наличие (3.4.1) соответствует тому дифференциально-геометрическому факту, что любая гладкая кривая в каждой своей точке симметрична на инфинитезимальном уровне, но глобально эта же кривая не обязана быть симметричной ни в какой точке. Примером "фундаментальной физической теории", в которой точно повторяется это свойство, является фридмановски-гамовская космология — для каждой точки в касательном пространстве имеют место (3.4.1), но глобально космологическая эволюция необратима, не имеет автоморфизмов по темпоральной координате. В-третьих, даже в такой высокосимметричной теории, как специальная теория относительности, автоморфизмы возможны только за счет полного игнорирования анизотропии. В.И.Вернадский настаивал, что пространство-время анизотропно, а изотропные модели являются лишь первым идеальным приближением. Сейчас построены математически корректные теории (Пименов, 1987) анизотропного пространства-времени, в которых обратимости времени (автоморфизмов (3.4.1)) нет, даже если анизотропия настолько мала, что выходит за рамки экспериментальной проверяемости.

Математически анизотропный мир сложнее. Так, приходится различать ортогональность и перпендикулярность, т.е. определения одновременности, данные через (3.1.1), уже не работают, нет ее транзитивности и т.д. Но философски включение в рассмотрение анизотропных миров уничтожает иногда встречающееся противопоставление физики и биологии: мол, в физике время обратимо, а в живой природе — нет. Это различие исчезает, а остается различие между более и менее идеализированными моделями.

3.5. Проблема пространства признаков

Мы отмечали, что возможная неньютонова упорядоченность и вынужденность перехода от линейно упорядоченного времени с равенством (3.3.1) к более сложному универсуму с неравенством (3.3.3) возникают только тогда, когда мы имеем в виду еще и нечто, лежащее вроде бы в совсем другом сундуке с ярлыком "пространство". Как можно мыслить себе "пространство" применительно к биологии, например? Как набор признаков, каждый из которых имеет количественную характеристику — это то, что Эшби (Эшби, 1969) называл "вектором в кибернетике". Например, это могут быть количественные таксономические признаки, может быть набор тех генов, которые допускают количественное выражение своей интенсивности (по активности энзимов или по фенотипическим измерениям), или иные “векторы”. Позиция (положение) особи (фенотипа, вида, словом, объекта изучения) задается вектором. Выбор фиксированной номенклатуры количественных признаков позволяет эти векторы складывать и умножать на число (по каждой позиции порознь). Пока в таком универсуме особей не предписано какое-то отношение рода порядка, разница между этими особями (в форме разности векторов или числа замещенных элементов, в форме ли метрики ρ из п.3.3 или еще в какой форме), сообщает нам информацию о *пространственном удалении*, в разбираемом примере — о биологическом удалении в биологическом пространстве. После того как для некоторых пар особей введено отношение “раньше-позже” и универсум превратился в частично упорядоченный универсум, разница между особями, одна из которых предшествует другой, будет уже метрикой в биологическом пространстве-времени. Может статься, что для возможности такого введения упорядоченности понадобится добавить в номенклатуру новые признаки.

Когда есть пространство признаков, тогда можно полноправно говорить и о *скорости изменения признаков.* Кроме оговорок, сделанных в п.2.8, следует помнить, что скорость бывает “средняя”, “конечная”, например, $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$, $\Delta z/\Delta t$, когда “признаки” суть обычные пространственные оси, и “мгновенная”, “дифференциальная”, например, dx/dt, dy/dt, dz/dt в том же пространстве. Теснейшим образом величина допустимых скоростей связана с характером упорядоченности универсума: при ньютоновом и только ньютоновом упорядочении dx/dt, dy/dt, dz/dt, ничем не ограничены, могут быть *любым* вещественным числом. Напротив, если существуют константы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6 такие, что $c_1 < dx/dt < c_2$, $c_3 < dy/dt < c_4$, $c_5 < dz/dt < c_6$, то упорядочение непременно эйнштейново (требование $c_1 = c_2 = \ldots = c_6 = c$ есть частный случай, ничего не меняющий по существу). Возможно, что по некоторым признакам dx/dt ограничены, а по другим de/dt — нет (см. пример 2.2.3)), тогда упорядочение не ньютоново и не эйнштейново.

С нашей точки зрения, работа по конструкциям понятия времени в биологии должна идти параллельно с работой по конструкции понятия биологического пространства. И если в отношении термина “время” могут быть споры, следует ли говорить о “биологическом времени” или же таковое есть результат какого-то А-преобразования (2.8.1), то в отношении биологического пространства (и биологического пространства-времени) таких споров возникнуть не может. Очевидно, что три физические координаты x, y, z *недостаточны* для описания биологических различий между особями, относительной удаленности гено- или фенотипов и т.п. Одной из целей описания этого очерка было убедить, что путь к созданию самосогласованного и эффективного понятия "время в биологии" проходит не *напрямую*, а через зигзаг в сторону, где сначала строится понятие *пространства в биологии*, а затем уже последнее переделывается в понятие *пространство-время в биологии.*

Проиллюстрируем на одном неопубликованном примере возможности теории, рассматривая общепризнанное понятие биологического пространства. Рассматривавшиеся выше (п.3.2, 3.3) releградуировки и сигнальные функции Милн вводил на фоне очень специфической теории (Milne, 1935), в которой искались решения определенных функциональных уравнений с условием инвариантности относительно некоторой группы автоморфизмов; нечто подобное делается сейчас в той теории, которая называется "теория физических структур". Например, если t — темпората, $\vec{x}$ — вектор-координата, $\vec{v}$ — скорость, а $\vec{g}$ — ускорение, то Милн ищет функцию $\vec{g} = \vec{g}\,(t, \vec{x}, \vec{v})$, инвариантную относительно лоренцовых преобразований. У него другие, более сложные функции, вроде функций от области. Нам нет нужды входить во все эти рассмотрения, достаточно сказать, что наличие именно *лоренцовых* преобразований оказалось неспецифической чертой его теории, мне удалось перенести ее и на ньютонов случай и на другие группы. Эта модель (в ньютоновом или эйнштейновом варианте), будучи содержательно проинтерпретирована в терминах астрономии, выглядела как система ядер галактик, вышедших из общего начала и разбегающихся во времени, вокруг каждого ядра возникают сгущения, а в промежутках между ядрами галактик материи становится все меньше и меньше, растет пустота.

И вот, допустим, мы знаем, что такое биологическое пространство. Тогда эта же математическая модель допускает не физическую, а *биологическую интерпретацию:* все особи некогда практически не отличались одна от другой (по биологическим признакам), но с течением времени они распадаются в группы особей, и группы эти с ходом времени все более *дивергируют*, увеличивают свои различия, а *промежуточные формы выпадают*, исчезают. Никаких гипотез относительно того, за счет "каких механизмов" происходит это "видообразование", идет ли

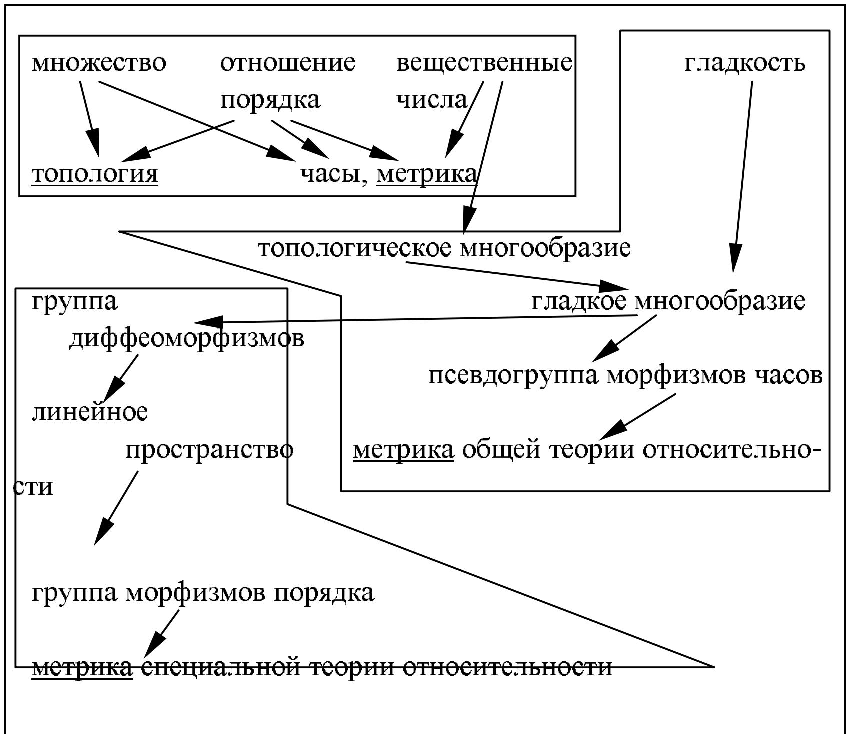

Рис.5

"эволюция от простого к сложному" или наоборот, при таком математическом подходе не требуется. Единственное существенное математическое требование — наличие довольно богатой группы автоморфизмов ("симметрий") и функций, инвариантных относительно этой группы. Первое биологически соответствовало бы принципу виртуального *равноправия* разных биологических видов (родов, классов) — между млекопитающими и вирусами, пресмыкающимися и простейшими *нет* в этой теории *принципиальной разницы*, как нет в механике разницы между неподвижной лабораторией, падающей на Солнце лабораторией и лабораторией с субсветовой скоростью полета. Второе означало бы *наличие инвариантных биологических законов*. Этот результат я получил в 1959, но опубликовать не собрался, потому что математика там тривиальная, биология еретичная, а общепринятого понятия биологического пространства еще не существовало.

3.6. Схема выводимости понятий (объектов) при эйнштейновом упорядочении

Рассмотрим схему, представленную на рис.5. Вверху расположены примарные, невыводимые, “априорные” понятия. Стрелки указывают понятия, выводимые из расположенных вверху объектов, причем узлы отмечают места, где формулируются аксиомы в терминах вышестоящих понятий. Подчеркнуты те понятия, которые выводимы при эйнштейновом упорядочении, но невыводимы при ньютоновом упорядочении.

§4. Каузальность и детерминизм

4.1. Идеология дифференциальных уравнений

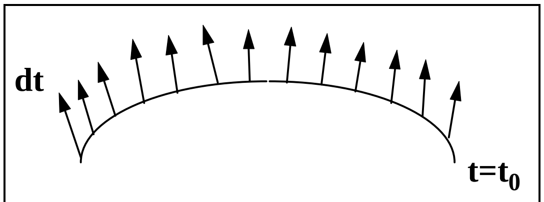

Рис.6

Современная физика работает в парадигме дифференциальных уравнений. Поэтому на первом уровне (теоретико-множественном) возможно сформулировать лишь те фрагменты физики, где дифференциальных уравнений нет в принципе (например, такие интегральные уравнения, которые не сводятся к дифференциальным). На втором, дифференциально-топологическом уровне, ключевой момент следующий. Пусть известны дифференциальные уравнения, управляющие процессом. Пусть в дату $t = t_0$ известны все фигурирующие в этих уравнениях величины. Тогда математика дает возможность вычислить в дату $t > t_0$ все фигурирующие величины и тем “предсказать будущее”. В математике это называется “задачей Коши”, хотя уже Лаплас пользовался такой постановкой (рис.6). Из рис.6 видно, что причинным воздействием данные с поверхности $t = t_0$ “уносятся в будущее”. Отсюда вытекает логическая необходимость точно определить “будущее для множества”. Видно, что по самой поверхности $t = t_0$ никакого причинно-допустимого перемещения нет. Отсюда вытекает необходимость дать определение “ахронной поверхности”. Наконец, если никакое воздействие на будущее $t > t_0$ невозможно помимо поверхности $t = t_0$, где закреплены “начальные данные”, то тогда этими начальными данными однозначно детерминируется все в будущем. Так связаны между собой аппарат математической задачи Коши для дифференциальных уравнений и физическое осмысление его в терминах каузальности-детерминизма.

4.2. Область Коши-зависимости

Рассмотрим серию соответствующих дефиниций, работаем только с отношением порядка “<”.

Определение 4.2.1. *Будущим* A^{+} *для множества* A *называется множество* $\{x \mid \exists a \in A\ a < x\}$, *т.е.* $A^{+} = \cup\, a^{+}$ *по* $a \in A \subset U$, *аналогично прошлое* A^{-}.

Определение 4.2.2. *Насыщением множества* A *в будущее называется* $A^{\oplus} = A \cup A^{+}$, *аналогично для прошлого* $A^{\ominus}$.

Определение 4.2.3. *Каузальной границей в будущем множества* A *называется* $\partial A^{\oplus}$. *Это означает, что, если* $x \notin \overline{A^{\oplus}}$ *(здесь черта — замыкание в интервальной топологии), то ничто из* A *не может повлиять на* x.

Определение 4.2.4. *Множество* $A \subset (U, <)$ *называется ахронным, если для любых* $x, y \in A$ *верно* $x \notin \overline{y^{+}}$ & $y \notin \overline{x^{+}}$ *(иногда применяется вариант* $\rceil x < y \ \& \rceil y < x$).

Если бы мы работали посредством функционального времени t: $U \mapsto \mathbf{R}$, то по определению 2.4.1 из $x < y$ следовало бы $t_x < t_y$, а потому две такие точки не могли бы лежать на поверхности одновременности $t = \mathrm{const}$. Это и выражено определением 4.2.4 без привлечения $t \in \mathbf{R}^{U}$. Все определявшиеся нами в п.3.1 поверхности одновременности ахронны в этом смысле.

Определение 4.2.5. *Пусть* A — *ахронное множество. Убывающая последовательность* $\ldots < p_k < p_{k-1} < p_{k-2} < \ldots \ldots < p_2 < p_1$, *первая точка которой лежит в будущем* A^{+} *для* A, *называется сторонней для* A, *если* $p_k \notin A$ *и* $(p_k, p_{k-1}) \cap A = \text{€}\varnothing$ *при всех номерах* $k \geq 1$.

Что такое цепочка $\ldots <\text{€} p_k <\text{€} p_{k-1} <\text{€} p_{k-2} <\text{€} \ldots <\text{€} p_2 <\text{€} p_1 = p$? Это цепочка последовательных каузальных воздействий из прошлого p_k^{-} в будущее p^{+}. Завершение этих воздействий происходит *после* множества A, ($p \in A^+$, т.е. $\exists a\ a \in A\ \&\ a < p$). Естественно, что те цепочки воздействий, которые *минуют* A и сами, и своими промежутками (p_k, p_{k-1}), проходят *стороной* от A.

Определение 4.2.6. *Говорят, что событие* $p \in A^+$ *зависит от* A, *если* A *ахронно, а через* p *не проходит ни одной сторонней для* A *последовательности.*

Определение 4.2.7. *Областью Коши-зависимости в будущее* $D_+(A)$ *от* A *называется множество всех* $p \in U$, *которые зависят от* A.

Определение 4.2.8. *Говорят, что* A *— поверхность Коши для будущего, если всякая* $p \in A^+$ *зависит от* A, *иначе* $A^+ = D_+(A)$.

Смысл этих определений прост. Если $p \in A^+$, то это означает, что какое-то событие $a \in A$ *может повлиять* на p. Но равносильны ли выражения “может повлиять” и “определяет”, “детерминирует”? Нет, ибо если на p могут повлиять еще b, c, которые сами никак не обусловлены множеством A, то до ситуации “множеством A определяется ситуация в p” страшно далеко. Определения 4.2.5 — 4.2.8 в совокупности дают дефиницию того, что на будущее влияют события из множества A и только они — в том смысле, что вне их контроля ничто другое не влияет.

Аналогично определяется $D\_(A)$. Границы этих множеств $(\partial D_+(A)) \setminus A$, $(\partial D\_(A)) \setminus A$ называются горизонтами Коши, они как бы делят все пространство-время на каузально-несвязанные части.

Заметим, что эта терминология в полную силу работает именно в случае эйнштейновой упорядоченности, при ньютоновой она пробуксовывает. Более того, для ее эффективности необходимо еще выполнение некоторых специальных постулатов, но здесь неуместно их формулировать.

4.3. Гладкость в теории пространства-времени

Топологическое многообразие при эйнштейновом упорядочении может быть определено уже на первом уровне рассмотрения: топология есть (интервальная), вещественные числа есть, ничто не мешает ввести аксиому, что у каждой точки имеется окрестность, гомеоморфная R^n, тут n называется числом измерений. Не так просто с гладкостью, без которой немыслим второй, дифференциально-топологический уровень рассмотрения. Она возникает так: из множества всех непрерывных функций из U в R (считая уже U топологическим многообразием) мы выделяем *подсемейство функций* $F \subset R^U$, которое, если оно удовлетворит определенным аксиомам, и называется семейством гладких или дифференцируемых функций, короче, "гладкостью". После того как фиксирована гладкость, мы получаем право писать дифференциальные уравнения и применять их выводы. Тут и работают определения п.4.2.

И здесь неожиданно роковым оказывается переход от трех измерений к четырем. Пока мы имеем дело только с пространством (x, y, z), *гладкость единственная*. При переходе же к 4-мерным многообразиям, т.е. к *пространству-времени*, оказывается, что *существуют разные*, недиффеоморфные гладкости на одном и том же многообразии. Более того, на самых простых и естественных многообразиях вроде R^4 имеется, оказывается, бесконечно много недиффеоморфных гладкостей (Gonut, 1983). В уравнениях вида $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z)$ в силу абсолютности гладкости можно про нее и не упоминать. В этом случае рассуждения о гладкости носят сугубо технический характер и интересны лишь математикам. Но в уравнениях вроде $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ из-за *релятивности гладкости* она приобретает важный и непонятный для физики смысл: при переходе к другой гладкости производные, фигурирующие в уравнении, не будут преобразовываться линейно (или основанными на линейности методами), результаты не будут изоморфны и нет никаких физических оснований предпочесть одну гладкость другой.

А гладкость совершенно необходима в том ключевом моменте, который обсуждался в п.4.1. Благодаря дифференцируемости мы можем изображать "линии тока вещества" (или "линии переноса каузального воздействия") в бесконечно малый промежуток dt после $t = t_0$ в виде семейства параллельных линий (см. рис.6). Будь функции недифференцируемыми, хоть одна из них "сломалась бы", была бы не прямой, а ломаной, тогда бы нарушился "чинный" характер переноса воздействия — в той точке, где ломаная впилась бы в другую прямую, на одно и то же событие влияли бы два разных несогласованных фактора, не было бы *однозначности*. Гладкость нужна, но то, что гладко в одной гладкости, не-гладко в других гладкостях. Которая же из равноправных гладкостей “настоящая”, “соответствует физике процесса”?

Если же попробовать “махнуть рукой на гладкость” и включить в рассмотрение негладкие структуры, то немедленно столкнемся с загадочными объектами вроде “чертовой (канторовой) лестницы”. Например, в ньютоновом универсуме возможна материальная точка, которая поступательно движется в одном направлении и реально не стоит на месте, а перемещается только вперед. При этом ее мгновенная скорость *существует почти везде* (т.е. за вычетом множества меры нуль, “нулевой темпоральной длительности”), а всюду, где эта скорость существует, *она равна нулю*. Перемещаться с постоянной нулевой скоростью?! Трудно такое представить, а ведь это лишь первые простейшие неприятности, которые встречают нас, когда мы покидаем уютный класс гладких функций.

4.4. Необоснованность детерминизма

Со времен Лапласа, который первый провозгласил (подразумевавшуюся еще Ньютоном, по-видимому) детерминированность механических явлений как фундаментальный для устройства мира факт, в физике возникали разные направления мысли, *обходившие* эту детерминированность: термодинамическое направление, нашедшее наиболее полное выражение себя в квантовой физике, работающей не над многообразием R^4 пространства-времени, а над бесконечномерным “пространством состояний”; статистическое, привлекающее идею случайности и шума; дискретное, запрещающее бесконечную дробимость, а потому и дифференцируемость, а значит и парадигму дифференциальных уравнений. Но в самой механике, гидродинамике (а общая теория относительности даже в финслеровом обобщении структурально есть гидродинамика) и электродинамике представления о детерминированности сохранялись, подвергаясь разве что уточнениям. Результаты теперь излагаются не с квантором “во всем мире”, а при оговорках: “Если на поверхности Коши для будущего заданы начальные данные и известны управляющие процессом дифференциальные уравнения, то в области Коши-зависимости от этой поверхности в будущее” — и далее, как прежде, утверждается, что все фигурирующие в уравнениях величины определяются (детерминируются) однозначно.

Наличие неизоморфных гладкостей убивает эту формулировку. То обстоятельство, что — как обнаружилось только во второй половине XX века — при ньютоновом упорядочении вообще невозможна ни одна поверхность Коши, т.е. для всякой поверхности $t = t_0$ имеется сторонняя последовательность, например, (t, x) при $x = 1/(t - t_0)$, убивает эту идею и в прошлом науки. Ньютонова механика была построена так, что в любую дату Бог (или дьявол, или демиург) *мог* с бесконечно далекого расстояния с бесконечно большой скоростью бросить материальную точку, которая воздействовала бы на все события после t_0 уже с допустимой конечной скоростью, перемешивая воздействия от всего заданного на $t = t_0$.

Похоже, что идею детерминированности надо признать необоснованной. И соответственно пересмотреть следы воздействия этой идеи на нефизические науки, а они обширны — от представлений о железной детерминированности исторических процессов до представлений о детерминированности процессов биологических.

Более подробное изложение идей настоящей главы содержится в книге автора (Пименов, 1991).

ЛИТЕРАТУРА

АЛЕКСАНДРОВ А.Д. Философское содержание и значение теории относительности // Вопросы философии. 1959. №1. С.67 – 81.

ГОЛОВАХА Е.И., КРОНИК А.А. Психологическое время личности. Киев, 1984.

ГУЦ А.К. Аксиоматическая теория относительности // Успехи математических наук. 1982. Т.37, №2. С.39 – 79.

ЛЕВИЧ А.П. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии. М., 1982.

ЛЕВИЧ А.П. Метаболическое время естественных систем // Системные исследования. М., 1989. С.304 – 305.

МЕЙЕН С.В. Проблема геохронологических границ // Развитие учения о времени в геологии. Киев, 1982. С.209 – 219.

ПЕНРОУЗ Р. Структура пространства и времени. М., 1972.

ПИМЕНОВ Р.И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.

ПИМЕНОВ Р.И. Полуриманова геометрия // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1968. №14. С.154 – 172.

ПИМЕНОВ Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л., 1968. (Pimenov R.I. Kinematic Spaces. N.Y., 1970.)

ПИМЕНОВ Р. И. Основы теории темпорального универсума. Сыктывкар, 1991.

РИТМ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ В ЛИТЕРАТУРЕ И ИСКУССТВЕ. Л., 1974.

СИМАКОВ К.В. Геологический календарь на палеобиологической основе // Развитие учения о времени в геологии. Киев, 1982. С.242 – 270.

ФЛЕЙШМАН Б.С. Темпорально-биологический "закон логарифма" как следствие общесистемного гиперболического закона надежности регенерирующих систем // Темпоральные аспекты моделирования и прогнозирования в экологии. Рига, 1986. С.85 – 97.

ЧЕРЧ А. Введение в математическую логику. М., 1960.

ЭШБИ У.Р. Введение в кибернетику. М., 1959.

GOMPF R.E. Three exotic and other anomalies // Journal of differential geometry. 1983. V.18, №2. P.317 – 328.

MILNE E.A. Kinematic Relativity. Oxford, 1948.

MILNE E.A. Relativity, Gravitation and World-structure. Oxford, 1935.

SCHUTZ J.W. Foundations of' Special Relativity: Kinematic Axioms for Minkowski Spacetime. Berlin, 1978.

SCHREITZER B., SKLAR A. Probabilistic Metric Spaces. N.Y., 1983.