О гравитации, космологии и давлении

1. Введение

В первом приближении всю Вселенную обычно рассматривают как шар с центром в произвольной точке, более или менее равномерно заполненный материей со средней плотностью ρ. Такие представления согласуются с простейшей космологической моделью Эйнштейна-Фридмана, оперирующей с трехмерным неэвклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны R (сферической гиперповерхностью 4-мерного эвклидового шара). Указанное пространство предполагается в этой модели изотропным и заполненным "пылевидной" материей, а время выступает в качестве формального параметра, от которого и зависит "текущая" кривизна пространства. Уравнения Эйнштейна записываются в виде [1]:

$$k\cdot(c/R)^2 + (R'/R)^2 - 2(R''/R) = - 8\cdot\pi\cdot G\cdot P/c^2$$
$$k\cdot(c/R)^2 + (R'/R)^2 = 8\cdot\pi\cdot G\cdot\rho /3,$$

где G - постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона, c - скорость света, ρ - плотность, P - давление, k=0, 1 или -1 в зависимости от знака кривизны. Штрих здесь обозначает дифференцирование по времени.

Хорошо известны три класса решений этой системы ***в предположении, что давление*** P ***равно нулю***. Выбор между ними зависит от соотношения между реальной (ρ) и “критической” ($\rho_{кр}$) величиной средней плотности материи во Вселенной:

- при $\rho > \rho_{кр}$ радиус кривизны сначала растет со временем, а затем убывает, кривизна положительна;
- при $\rho_{кр} > \rho > 0$ радиус кривизны неограничено возрастает со временем, кривизна отрицательна;
- при $\rho = \rho_{кр}$ Вселенная имеет плоскую метрику, кривизна отсутствует.

Здесь под критической плотностью подразумевается величина

$$\rho_{кр} = 3\cdot H^2/ (8\cdot\pi\cdot G)$$

где H - постоянная Хаббла.

Проблема, которая обсуждается ниже, зключается в том, насколько обоснованным является тезис о равенстве нулю давления в этой модели, и к чему приводит отказ от принятия данного тезиса. Анализируется известное решение для однородного шара конечного радиуса и его экстраполяция на случай как стационарной, так и эволюционирующей однородной Вселенной. При этом устанавливается истинный физический смысл космологической постоянной, впервые введенной Эйштейном для стационарной космологической модели. Наряду с этим приводится новое решение для нестационарной космологической модели, способное радикально повлиять на основные физические представления о Вселенной.

2. О давлении внутри материального тела

Всем хорошо известны примеры давления, возникающего вследствие сил тяготения – например, давление водяной толщи на дне моря. Такого рода давление называют статическим, оно обусловлено потенциальной энергией взаимодействия вещества и не связано с движением этого вещества.

“Пылевидную” материю, состоящую из звездных образований, можно рассматривать в качестве своего рода газа. Однако в современной космологии динамическим давлением такого газа обычно пренебрегают ввиду малых скоростей составляющих его частиц. Игнорируется при этом и возможная роль статического давления, что не кажется априорно справедливым.

Прежде чем переходить к космологии, обратимся к задаче о поле тяготения центрально-симметричного однородного шара, которая была успешно решена в общей теории относительности (Шварцшильд). В частности, внутри однородного шара радиуса r_1 с плотностью ρ давление P материи (идеальной жидкости) описывается выражением (см. [2]):

$$P = \Phi(r, r_1, R)\cdot c^4/(8\cdot\pi\cdot G\cdot R^2)$$

где радиус кривизны R определяется соотношением

$$R^2 = 3c^2/(8\cdot\pi\cdot G\cdot\rho)$$

а функция $\Phi(r, r_1, R)$ задается дробью вида

$$\Phi(r, r_1, R) = \frac{3\sqrt{1-(r/R)^2} - 3\sqrt{1-(r_1/R)^2}}{3\sqrt{1-(r_1/R)^2} - \sqrt{1-(r/R)^2}}$$

Р. Толмен в [2] замечает, что решение, как правило, является действительным, т.к. обычно радиус шара r_1 меньше, чем радиус кривизны R. Действительно, гравитационный радиус R_G такого шара равен

$$R_G = 2\cdot G\cdot M/c^2 = 2\cdot(4\cdot\pi\cdot r_1^3\cdot G\cdot\rho)/(3\cdot c^2) = r_1^3/R^2$$

откуда следует соотношение

$$R_G/r_1 = (r_1/R)^2$$

Поскольку в обычных случаях отношение гравитационного радиуса шара к его геометрическому радиусу очень мало, то весьма мало и отношение геометрического радиуса к радиусу кривизны. В этом случае фактор $\Phi(r, r_1, R)$ является положительным и плавно убывает до нуля при стремлении текущего расстояния r (от центра) к естественному пределу r_1.

Решение Шварцшильда связывает плотность шара с давлением материи внутри шара. Оно дает ***конечную*** (отличную от нуля) величину давления при сколь угодно малой ненулевой плотности материи. При распространении этой модели на всю Вселенную априорное пренебрежение статическим давлением можно пытаться мотивировать его малой величиной и трудностью интегрирования уравнений Эйнштейна, но при этом нельзя быть уверенным в правильности получаемых результатов. Более того, при анализе космологической проблемы ситуация становится, как мне кажется, еще сложнее.

Действительно [3], при средней плотности вещества во Вселенной порядка 10^{-30} г/см гравитационный радиус нашей Вселенной достигает величины 10^{28} см, что, повидимому, не меньше, чем ее геометрический размер; следовательно, и отношение ее геометрического радиуса r_1 к радиусу кривизны R, скорее всего, больше единицы!

Для случая сильно коллапсирующего шара (при (r_1 /R) >> 1) выражения под знаком радикала в множителе Ф(r, r_1, R) оказываются отрицательными, поэтому, вынося и затем сокращая в числителе и знаменателе мнимую единицу, его (множитель) следует преобразовать к виду:

$$\Phi(r, r_1, R) = \frac{3\sqrt{(r/R)^2 - 1} - 3\sqrt{(r_1/R)^2 - 1}}{3\sqrt{(r_1/R)^2 - 1} - \sqrt{(r/R)^2 - 1}}$$

Теперь давление будет уже отрицательным! Пренебрегая единицей в радикалах и рассматривая центральную область шара R < r << r_1 , найдем, что пределом для Ф(r, r_1, R) в этом случае служит –1, поэтому при указанном условии получаем, что

$$P = - c^4/(8\pi G R^2) = - \rho c^2/3$$

Заметим, что в случае строгого равенства (r_1/R) = 1 давление также отрицательно, а значение Ф(r, r_1, R) строго равно –3 в ***любой*** точке внутри шара (т.е. $P = - \rho c^2$).

Таким образом, для однородного шара в общем случае отличны от нуля все компоненты тензора плотности энергии-импульса, сколь малой бы ни была плотность материи ρ. Кстати заметим, что основное уравнение Эйнштейна исторически было сконструировано чисто эвристическим путем, его левая (геометрическая) часть приравается к правой (физической) части просто по аналогии с классическим уравнением Пуассона. Из только что рассмотренного примера видно, что нет никаких принципиальных оснований априорно полагать равным нулю обусловленное гравитацией давление материи, которое существует и в теории, и в реальности.

3. Плотность и давление в космологической модели Вселенной

Теперь вернемся к тезису автора о необходимости глобального учета гравитационного давления и будем считать в общем случае величину этого давления P в (приведенных в начале работы) уравнениях Эйнштейна отличной от нуля. Оказывается, что в этом случае возникают по крайней мере два новых замечательных решения.

Первое решение отвечает стационарному случаю R'= 0, R"= 0. Подставив эти условия в уравнение, получим:

$$(c/R)^2 = - 8 \cdot \pi \cdot G \cdot P/c^2$$
$$(c/R)^2 = 8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho /3$$

откуда следует связь между давлением и радиусом кривизны:

$$\rho = 3 \cdot c^2 / (8 \cdot \pi \cdot G \cdot R^2)$$

Но этот результат совпадает, как нетрудно заметить, с предельным случаем (R < r << r_1) задачи для локального однородного коллапсирующего шара, рассмотренной выше! Весьма сходный по сути дела результат получил для своей первоначальной модели А.Эйнштейн, когда, убедившись в отсутствии стационарного решения при P=0, был вынужден искусственно ввести в свое уравнение знаменитую космологическую постоянную! В дальнейшем вопрос об этой величине и ее физическом смысле повис в воздухе и считается открытым вплоть до настоящего времени. Таковы издержки методологической традиции.

Второе замечательное решение возникает, если принять условия R'= c, R"= 0, согласно которым радиус кривизны растет строго пропорционально времени. Подставив данные условия в приведенные выше уравнения Эйнштейна, найдем:

$$2\cdot(c/R)^2 = - 8\cdot\pi\cdot G\cdot P/c^2$$
$$2\cdot(c/R)^2 = 8\cdot\pi\cdot G\cdot\rho /3$$

при этом коэффициент связи между давлением и радиусом кривизны по сравнению со стационарной моделью отличается в два раза. В обоих случаях соотношение между давлением и плотностью имеет вид:

$$P = - \rho\cdot c^2/3$$

Важно отметить, что даже нестационарное решение в явном виде не содержит такой параметр, как время. Далее, линейная зависимость радиуса кривизны от времени, будучи постулированной, не должна теперь выводиться из полученных соотношений; этот же постулат делает ее физически не зависящей (во времени) от плотности материи. Отсюда следует вывод, противоречащий принятой традиции решения уравнений поля, но полностью отвечающий самому духу эйнштейновского подхода, направленного на геометризацию физики. Он состоит в том, чтобы из найденных выражений искать плотность и давление материи в виде зависимостей от кривизны пространства, а не наоборот:

$$\rho = 3\cdot c^2 / (4\cdot\pi\cdot G\cdot R^2)$$
$$P = - c^4/(4\cdot\pi\cdot G\cdot R^2)$$

На языке физики это означает, что плотность и давление материи суть просто данные нам в ощущениях (измерениях) характеристики кривизны пространства, т.е. что они являются вторичными, зависимыми от нее величинами. Добавим, что этот путь, в сущности, обозначил сам Эйнштейн, введя замкнутую на себя Вселенную, т.е. заменив задание фиксированных условий на границах условием самосогласованности решения!

4. Теория тяготения и закон сохранения энергии

Остановимся на одном важнейшем для физики обстоятельстве. До сих пор в ней практически не использовались модели, в которых принципиально не выполняется закон сохранения полной массы, а значит, и энергии.

Поскольку новое решение получено для случая R'=c, то постоянная Хаббла оказывается обратно пропорциональной радиусу и возрасту Вселенной. Существенное отличие этого решения от похожего решения Фридмана состоит в том, что оно отвечает положительной кривизне 4-сферы, а не плоской метрике, и соответствует не критическому, а произвольному положительному значению средней плотности материи. Соответственно и масса Вселенной, равная произведению средней плотности на ее объем, оказывается не постоянной во времени, а пропорциональной радиусу кривизны и времени.

Таким образом, несохранение полной массы Вселенной (и связанной с ней энергии покоя) оказывается прямым следствием учета статического давления материи в уравнении Эйнштейна. Является ли этот факт катастрофой, побуждающей вообще отказаться от такого решения? Я думаю, что ситуация не так драматична.

Как известно, закон сохранения энергии однозначным образом соответствует такому чисто "геометрическому" свойству Вселенной, как однородность времени, т.е. независимость в общем случае характеристик течения физического процесса от того, когда именно он был начат - вчера, сто лет или сто миллиардов лет назад. Такое соответствие обусловлено отсутствием в аналитическом формализме явной зависимости от времени функции Лагранжа замкнутой физической системы, т.е. равенством нулю ее частной производной по времени.

Оставаясь в рамках классической механики, мы можем усомниться в том, что течение всех без исключения физических процессов не зависит от кривизны той области пространства, в которых эти процессы протекают. Напомним, что основные уравнения Лагранжа выводятся из вариационного принципа, согласно которому реальная траектория в пространстве обеспечивает наименьшее значение специального функционала - действия. Если кривизна пространства меняется с течением времени, то выбор начального и конечного момента варьирования принципиально влияет уже на само множество и характер варьируемых траекторий, что в общем случае исключает независимость результата от этого выбора, т.е. тезис об однородности времени.

Когда же речь заходит о распространении закона сохранении энергии на общую теорию относительности, то делается это скорее в силу традиции, чем исходя из строгого обоснования. Это приводит к известным логическим трудностям, по поводу которых у физиков имеются различные мнения, и на которых мы здесь останавливаться не станем. Можно подозревать, что традиция опоры на закон сохранения энергии постепенно приобрела чисто психологический характер, в точности повторяя судьбу пятого постулата Эвклида.

В действительности именно уравнения Эйнштейна и отражаемая ими объективная физическая реальность должны использоваться в качестве отправного момента теории. В правильной теории найденная путем решения этих уравнений зависимость средней плотности материи и всей массы Вселенной от времени должна приводить к точному или приближенному выполнению закона сохранения массы и энергии, а не наоборот (по сути, постулат о сохранении количества материи и энергии приходится вводить только потому, что давление априорно примается нулевым)! Так и обстоит дело в действительности, и данное обстоятельство не только проясняет проблему сохранения энергии во Вселенной, но и помогает выйти на правильные исходные позиции при анализе такого объективно существующего феномена, как направленность ("стрела") времени.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков.** *Строение и эволюция Вселенной.* Москва, Наука, 1975.
2. **Р.Толмен.** *Относительность, термодинамика и космология.* Москва, Наука, 1974.
3. **Л.Э.Гуревич, Э.Б.Глинер.** *Общая теория тносительности после Эйнштейна.* Москва, Знание (сер. Физика), 1972.