Томас Ф. Джордан

ПОЧЕМУ КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ЛИНЕЙНА?

---
arXiv:quant-ph/0702171 v1 16 Feb 2007
Why quantum dynamics is linear

Thomas F. Jordan

From talks based on reference [1] email: tjordan@d.umn.edu

Physics Department, University of Minnesota, Duluth, Minnesota 55812

Перевод М.Х.Шульмана

Квантовая динамика линейна. Откуда мы это знаем? Из теории или из эксперимента? Рассматривается история этого вопроса. Предлагались нелинейные обобщения квантовой механики. Они предсказывают небольшие, но заведомо нелинейные эффекты, которых очень точные эксперименты не обнаружили. Есть ли принципиальная причина, по которой нелинейность не найдена? Возможна ли она? Должна ли квантовая динамика быть линейной? Попытки доказать это не были завершенными, либо потому, что принимаемые допущения не были бесспорными, либо потому, что приводимые аргументы не были окончательными. Вопрос так и был оставлен без разрешения.

Однако имеется простой ответ, основанный на простом допущении. Он был найден в два этапа, которые разделяют 44 года. Эти этапы основаны на более простых и более убедительных допущениях. Обоснование допущений, лежащих в основе доказательства Wigner'a-Bargmann'a, известно с 1962 года. Оно предполагает, что отображения матриц плотности линейны во времени. На этом этапе было сделано также допущение, что матрицы плотности отображаются взаимно-однозначно. Альтернативой является предположение, что взаимно-однозначно отображаются друг в друга чистые состояния, и что энтропия не уменьшается.

На следующем этапе (в 2006 году) было доказано, что отображения матриц плотности действительно линейны во времени. При этом, как и на предшествующем этапе, было предположено, что в каждый момент времени физические величины и состояния описываются обычными линейными структурами квантовой механики, так что вопрос состоит только в том, как же все действительно изменяется во времени.

Окончательное доказательство опирается всего лишь на допущение о том, что динамика не зависит от наличия внешних систем, но должна допускать описание системы как части более широкой системы.

Ключевые слова: нелинейная квантовая механика, нелинейное уравнение Шредингера

I. ВВЕДЕНИЕ

Можем ли мы доказать, что квантовая динамика должна быть линейной? Что должно быть линейным уравнение Шредингера? Какие допущения необходимы для этого? Имеется ли принципиальная причина, в силу которой квантовая динамика линейна? Если нет, то квантовая динамика могла бы быть линейным приближением нелинейной теории; эксперименты могли бы обнаружить маленькие нелинейные эффекты. Такая возможность слишком интересна, чтобы легко поучить ответ. Мы хотим увидеть, сможет ли это работать. Мы согласимся, что это невозможно, только в том случае, если увидим, что на это существуют неопровержимо убедительные причины.

Wigner и Bargmann доказали [2, 3], что квантовая динамика должна быть линейной, если она не меняет абсолютных значений внутренних произведений векторов состояний. Bialynicki-Birula и Mycielski [4] предложили нелинейное уравнение Шредингера, открывающее путь к точным экспериментальным тестам [5, 6, 7].

Weinberg [8, 9] предложил общий нелинейный вид квантовой механики, который приводит к еще большим возможностям экспериментальной проверки [10, 11, 12, 13]. Серьезность этих предложений и их экспериментальной верификации показывает, что доказательство Wigner'a-Bargmann'a линейности не было убедительным; их допущение не было принято в качестве бесспорного. Равным образом не было таковой признана и более поздняя идея о том, что линейность квантовой динамики вытекает из требований теории относительности [14, 15, 16]. Вопрос так и был оставлен без разрешения. Эта история описана в разделах II-IV.

Однако имеется простой ответ, основанный на простом допущении. Он был найден в два этапа, которые разделяют 44 года. Обоснование допущений, лежащих в основе доказательства Wigner-Bargmann, известно [17, 18, 19, 20] с 1962 года. Этот ранний этап рассмотрен в разделе V. Оно предполагает, что отображения матриц плотности линейны во времени. На этом этапе было сделано также допущение, что матрицы плотности отображаются взаимно-однозначно. Альтернативой является предположение, что взаимно-однозначно отображаются друг в друга чистые состояния, и что энтропия не уменьшается.

На следующем этапе (в 2006 году) было доказано, что отображения матриц плотности действительно линейны во времени [1]. При этом, как и на предшествующем этапе, было предположено, что в каждый момент времени физические величины и состояния описываются обычными линейными структурами квантовой механики, так что вопрос состоит только в том, как же все действительно изменяется во времени. Окончательное доказательство опирается всего лишь на допущение о том, что динамика не зависит от наличия внешних систем, но должна допускать описание системы как части более широкой системы. Это допущение обсуждается в разделе VIII.

II. ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ТЕСТЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КВАНТОВОЙ ДИНАМИКИ

Является ли квантовая механика линейным приближением более фундаментальной нелинейной теории? С малыми нелинейными эффектами, которые еще не обнаружены? Как их можно обнаружить?

Одной из возможностей, предложенной Bialynicki-Birula и Mycielski [4], является нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = [\frac{-1}{2m}\nabla^2 + V - b\,ln(|\psi|^2)]\psi. \tag{2.1}$$

Величина этой нелинейности определяется малым положительным числом b. Функция ln позволяет простым образом нормировать волновые функции и описывать системы, состоящие из невзаимодействующих подсистем. Данное выражение дает известное соотношение между энергией и частотой. При этом возникают солитонные решения, нерасплывающиеся волновые пакеты. В целом эта модель является дает очень подходящим кандидатом для нелинейной квантовой динамики. Предложенная в [5] проверка с помощью нейтронной интерферометрииибыла осуществлена сначала в ходе двухщелевого эксперимента [6] и дала оценку

$$b < 3.4\ .\ 10^{-13}\text{eV} \tag{2.2}$$

а затем с помощью дифракции Френеля [7], и это снизило предел до

$$b < 3.3\ .\ 10^{-15}\text{eV}. \tag{2.3}$$

Все это дает чистую и простую волновую механику. Она показывает, как ведет себя волновая функция, если она удовлетворяет нелинейному волновому уравнению.

Нелинейной динамику делает зависимость гамильтониана от волновой функции; гамильтониан зависит от состояния. Для координатной волновой функции (wave function of position) это дает нелинейное уравнение Шредингера, подобное (2.1). Для спина, описываемого матрицами Паули Σ_1, Σ_2, Σ_3 это означает, что гамильтониан может быть представлен матрицей вида

$$H = \epsilon\langle\Sigma_3\rangle\Sigma_3. \tag{2.4}$$

Этот гамильтониан является матрицей, которая зависит от состояния, потому что Σ_3 является матрицей, и среднее значение $\langle\Sigma_3\rangle$ зависит от состояния. Уравнения движения для средних значений $\langle\Sigma_1\rangle$, $\langle\Sigma_2\rangle$, $\langle\Sigma_3\rangle$ для этого гамильтониана являются теми же, что для любого гамильтониана, являющегося степенью спиновой матрицы,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\Sigma_1\rangle &= -2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle\langle\Sigma_2\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\Sigma_2\rangle &= 2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle\langle\Sigma_1\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\Sigma_3\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Эти уравнения движения являются нелинейными, потому что гамильтониан содержит среднее значение. Они описывают прецессию с частотой, которая зависит от состояния.

Это является характерным случаем в нелинейной квантовой механике Weinberg'a [8, 9], относящимся к нелинейной динамике для спина. Концепция Weinberg'a очень широка. Она позволяет изменять обычную линейную квантовую механику различными способами. Например, может быть изменено представление физических величин линейными операторами. Я проанализировал эту возможность и счел, что это не оптимальный путь; для спина он не дает ничего нового [21]. Я сделал вывод (как, наверное, и любой на моем месте), что более рациональным является допустить, что в каждый момент времени ситуация должна сохраняться в том же смысле, что и в обычной линейной квантовой механике, так что вопрос теперь состоит в том, как же именно происходят изменения во времени. Делая это допущение и следуя предложению Polchinski [22] сделать теорию Weinberg'a применимой к системе, составленной из невзаимодействующих подсистем, я показал, что теория Weinberg'a в точности равносильна утверждению, что гамильтониан зависит от состояния, как в нашем примере (2.4), и это относится как к средним значениям, так и к операторам [23, 24]. Реально это дает немного больше, чем теория Weinberg'a; возникают некоторые простые примеры, которые теория Weinberg'a не может описать [24].

Предложение Weinberg'a вдохновили на проведение четырех точных спектроскопических тестов [10, 11, 12, 13]. Два из них связаны с эффектом, которые дает в гамильтониане член типа (2.4). Два других связаны с эффектом от подобного члена для спина 3/2. Не было обнаруженр никаких нелинейных эффектов. Это понижает пределы до

$$|\varepsilon| < 1.6 \,.\, 10^{-20}\mathrm{eV}$$

$$< 2 \,.\, 10^{-27}$$

энергии связи на один нуклон (2.6) для величины нелинейного взаимодействия.

Означает ли это, что ищется то, что не существует? Является ли нелинейная квантовая динамика невозможной? Должна ли быть квантовая динамика линейной?

III. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО WIGNER'a-BARGMANN'a ЛИНЕЙНОСТИ ДИНАМИКИ

Можем мы доказать, что квантовая динамика должна быть линейной? Да, если мы предположим, что

чистые состояния ↔ чистые состояния,

$\psi \leftrightarrow \psi'$ взаимно-однозначно,

$$|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = |\langle\psi'|\varphi'\rangle|^2.$$

Это как раз то, что показали Wigner и Bargmann[2, 3]. Они доказали, что переход от ψ к ψ′ может быть осуществлен с помощью линейного или антилинейного оператора. Произведение двух антилинейных операторов линейно, так что, если переход может быть выполнен за два подобных шага (равно как изменение за некоторый интервал времени может быть представлено результатом изменений за две половины этого интервала), то в целом оператор должен быть линейным. Если мы постулируем в качестве группового свойства, что изменение за некоторый интервал времени эквивалентно сумме изменений за начальную и конечную части, из которых состоит этот интервал, и что изменения вероятностей во времени непрерывны, то мы приходим к линейному уравнению Шредингера [25].

Эти доказательства были найдены задолго до предложений нелинейных версий квантовой механики и тестов на нелинейность. Почему же теория развивалась, а эксперименты выполнялись, несмотря на эти доказательства? Я думаю, причина заключается в том, что допущение вида

$$|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = |\langle\psi'|\varphi'\rangle|^2 \qquad (3.1)$$

не является неоспоримым. О чем оно говорит? Состояния ψ и φ в некоторый момент времениапереходят в состояния ψ′ and φ′ в более поздний момент времени. Если вы производите измерения для состояния φ в более ранний момент времени, то вы должны получить такие же вероятности, что и для состояния φ′ в более поздний момент времени. Это разумно.

Но должно ли это быть верным? Можете ли вы себе представить, как именно это могло бы нарушаться? Bialynicki-Birula и Mycielski описали один способ. Weinberg описал другой. Гамильтониан зависит от состояния, так я бы хотел это сформулировать. Почему бы нет?

IV. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ?

В дискуссии, последовавшей за предложением Weinberg'а и его экспериментальной проверкой, появилась новая идея.
Можем ли мы доказать, что квантовая динамика должна быть линейной?
Требует ли этого теория относительности?
Влечет ли нелинейность возможность передачи сверхсветовых сигналов?

Я видел три статьи с аргументацией в пользу последнего утверждения. Заметив [1], что две из них [14, 16] не применимы к теории Weinberg'а, я сосредоточился только на третьей [15]. Она работает со специфическим примером теории Weinberg'а, которая описывается гамильтонианом (2.4) и уравнениями движения (2.5), что мы уже видели. Решения этих уравнений движения взяты в виде $\langle\Sigma_3\rangle$ равно константе и

$$\begin{aligned}\langle\Sigma_1\rangle(t) &= \langle\Sigma_1\rangle(0)cos(2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle t) - \langle\Sigma_2\rangle(0)sin(2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle t)\\ \langle\Sigma_2\rangle(t) &= \langle\Sigma_2\rangle(0)cos(2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle t) + \langle\Sigma_1\rangle(0)sin(2\epsilon\langle\Sigma_3\rangle t). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Рассмотрим два различных набора начальных условий.

В наборе (а)

$$\langle\Sigma_3\rangle(0) = \pm 1. \qquad (4.2)$$

Тогда

$$\langle\Sigma_1\rangle(0) = 0 = \langle\Sigma_2\rangle(0), \tag{4.3}$$

поскольку сумма квадратов не может быть больше, чем 1, то

$$\langle\Sigma_1\rangle(t) = 0 = \langle\Sigma_2\rangle(t). \tag{4.4}$$

Начальные (b) таковы, что

$$\langle\Sigma_3\rangle(0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \langle\Sigma_1\rangle(0). \tag{4.5}$$

Тогда $<\Sigma_2>$ (0) равно 0 и

$$\langle\Sigma_2\rangle(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}sin(\pm\sqrt{2}\epsilon t) = \frac{1}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{2}\epsilon t). \tag{4.6}$$

Даже для смесей 50−50 случаев + и − результат отличен от начальных условий (a) и (b). Что, как это аргументируется, приводит к сверхсветовым сигналам.

Аргументация [15] использует две частицы со спином 1/2 в двух состояниях с суммарным спином 0. Частицы разлетаются от общего источника в различных направлениях и движутся к пространственно разделенным положениям, где их спины измеряются: в одном месте Алисой, в другом Бобом. Это многократно описанная конфигурация, пришедшая из версии Bohm'а 1951 года мысленного опыта из статьи Эйнштейна, Подольского, Розена 1935 года [26, 27].

Если Алиса и Боб измеряют компоненты спина своих частиц в одном и том же направлении, то когда Алиса получает +, Боб получает −, а когда Алиса получает −, Боб получает +. Это экспериментально проверяемо; вы можете наблюдать это снова и снова.

Предположим теперь, что когда спин приходит к Бобу, он "пропускает" его через нелинейную динамику, описываемую гамильтонианом (2.4) в момент времени t и затем измеряет компоненту спина в y-направлении. Предположим, он делает это для для каждого из длинной серии спинов, в то время как Алиса измеряет z-компоненту каждого спина, приходящего к ней. В половине случаев Алиса получает + , в половине − (в среднем). Аргумент работы [15] состоит в том, что тогда $<\Sigma_3>$ есть 1 для половины спинов, которые получает Боб, и $<\Sigma_3>$ есть −1 для другой половины. Спины, приходящие к Бобу, описываются начальными условиями (a). После того, как он "пропустит" спин через нелинейную динамику и готов измерить y-компоненту, Боб имеет спин в состоянии, где $<\Sigma_2>$ есть 0. Он получает + в половине случаев и − в половине случаев для y-компоненты.

Предположим, что вместо этого Алиса измеряет компоненту каждого спинов направлении 45◦ между z и x. Она получает + в половине случаев и − в другой половине случаев. Аргумент работы [15] состоит в том, что спины, приходящие к Бобу, в в половине случаев равны + в направлении 45◦, а в половине случаев они равны −. Они описываются начальными условиями (b). После того, как Боб “пропустит” спин через нелинейную динамику и готов измерить его y-компоненты, он имеет спин в состоянии, для которого <Σ_2> равно $(1/\sqrt{2})sin(\sqrt{2}\epsilon t)$. Он может получить + более чем в половине случаев или − более чем в половине случаев, в зависимости от его выбора t. Итоговое заключение [15] состоит в том, что Боб может сказать, измеряет ли Алиса компоненты спина в направлении z или в направлении 45◦.

Таким образом, Алиса может послать сигнал Бобу. Поскольку нет ограничений на расстояния и времена, сигнал может оказаться сверхсветовым.

Все это не обязательно так. Если недостаточно времени для передачи сигнала со скоростью света между измерениями, выполняемыми Алисой и Бобом, то движущиеся наблюдатели разойдутся во мнении, какое измерение было сделано первым. Для двух спинов, измеряемых Алисой, будут вычислены вероятности 50 − 50 для состояния с полным спином 0, без учета того, что делает Боб. Таковы же будут вероятности измерений Боба, без учета того, что делает Алиса. Тогда сигнала нет [23, 28, 29].

Если же достаточно времени для передачи сигнала со скоростью света между измерениями, выполняемыми Алисой и Бобом, так что Алиса может сообщить Бобу, что он получит, то состояния спинов Боба будут подготовлены, как утверждается в аргументации, и вероятности результатов Боба будут такими, как эта аргументация говорит. Тогда сигнал имеется, но он не сверхсветовой.

Что еще может быть сказано [28, 29] – и в этом отношении приведенные аргументы являются притягательными – так это то, что в присутствии нелинейной динамики и в отсутствие сверхсветовых сигналов должно происходить внезапное изменение результатов Боба как закономерное следствие изменения расстояния или времени, разделяющих измерения, которые выполняют Алиса и Боб, при переходе от пространственно-подобного интервала к времени-подобному.

Это важно? Да. Доказывает ли это, что нелинейная динамика невозможна? Нет. Это не показано ясно, в частности, в очаровательной статье, написанной в виде фантазии о воображаемом персонаже, который находит способ определить изменения в результатах Боба [30].

V. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОПУЩЕНИЙ WIGNER’a-BARGMANN’a

Между тем имеется простое решение. Оно было найдено в два этапа, которые разделены 44 годами. Были сделаны шаги, чтобы упростить первоначальные допущения. Доказательство ряда допущений, лежащих в основе рассуждений Wigner’a-Bargmann’a было известно [17, 18, 19, 20] с 1962 г. Но доказательство главного допущения, которое ими использовалось, было найдено только недавно [1]. В этом разделе мы рассмотрим ранний этап, последнему этапу посвящены разделы VII и VIII.

Можем ли мы доказать, что квантовая динамика должна быть линейной? Да, если мы предположим, что линейным является изменение матрицы плотности.

Если отображение $\rho \to \rho'$ является
линейным и взаимно-однозначным,
то
чистые состояния ↔ чистые состояния,
$\psi \leftrightarrow \psi'$ взаимно-однозначно,
$|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = |\langle\psi'|\varphi'\rangle|^2$.

Доказательство несложно. Мы предполагаем, что динамика применима ко всем состояниям. В течение некоторого интервала времени она отображает каждую матрицу плотности ρ в матрицу плотности ρ'. Предположение о линейности отображения означает, что если ρ_1 и ρ_2 отображаются в ρ'_1 и ρ'_2, то

$$\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2, \tag{5.1}$$

для некоторого числа p между 0 и 1 отображается в

$$\rho' = p\rho'_1 + (1-p)\rho'_2. \tag{5.2}$$

Мы предполагаем, что отображение является взаимно-однозначным, так что имеется и обратное к нему. Обратное отображение является линейным; доказательство того, что обратный к линейному оператору является линейным [25, теорема 7.1] применимо при определенных ограничениях и к матрицам плотности.

Чистые состояния отображаются в чистые состояния. Чистое состояние не может перейти в смешанное состояние: if ρ'_1 and ρ'_2 в уравнении (5.2) различны, то различны ρ_1 and ρ_2 в уравнении (5.1); так что если ρ' отвечает смешанному состоянию, то это относится и к ρ. Обратное отображение также переводит чистые состояния в чистые состояния, так что множество всех чистых состояний взаимно-однозначно отображается на себя.

Для каждого вектора $|\psi\rangle$ длины 1 пусть $|\psi'\rangle$ будет вектор длины 1 такой, что $(|\psi\rangle\langle\psi|)'$ есть $|\psi'\rangle\langle\psi'|$. Для каждой матрицы плотности ρ имеются ортонормальные векторы $|\psi_j\rangle$ и положительные числа p_j сумма которых $\sum_j p_j$ равна 1, так что

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \tag{5.3}$$

В силу линейности

$$\rho' = \sum_j p_j |\psi'_j\rangle\langle\psi'_j|. \tag{5.4}$$

Поскольку $\langle\psi'_j|\psi'_j\rangle$ равно 1,

$$\mathrm{Tr}[(\rho')^2] = \sum_{jk} p_j p_k |\langle\psi'_j|\psi'_k\rangle|^2 \geq \sum_j (p_j)^2 = \mathrm{Tr}[\rho^2]. \tag{5.5}$$

Тот же результат для обратного отображения дает

$$\mathrm{Tr}[(\rho')^2] = \mathrm{Tr}[\rho^2]. \tag{5.6}$$

Пусть |ψ> и |φ> - векторы длиной 1, и пусть

$$\rho = \frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2}|\phi\rangle\langle\phi|. \tag{5.7}$$

Тогда

$$Tr[\rho^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \tag{5.8}$$

и

$$\rho' = \frac{1}{2}|\psi'\rangle\langle\psi'| + \frac{1}{2}|\phi'\rangle\langle\phi'|, \tag{5.9}$$

в силу чего из уравнения (5.6) следует, что

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle|^2 = |\langle\psi|\phi\rangle|^2. \tag{5.10}$$

Отсюда и следует результат Wigner'a и Bargmann'a.

Линейные отображения матриц плотности могут также быть использованы для описания процессов, в которых чистые состояния отображаются в смешанные состояния, различные состояния отображаются в одни те же состояния, отображение осуществляется только на часть исходного множества состояний (в себя) или, в общем случае, не все отображения обладают обратным отображением. Необходимо определенное допущение, чтобы отделить такие процессы от динамики, описываемой уравнением Шредингера, которое предусматривает обратное преобразование для всех состояний. В ходе представленного доказательства мы предполагали, что отображение матриц плотности является взаимно-однозначным.

Альтернативой является допущение о том, что имеется множество всех чистых состояний (взамен множества всех матриц плотности), которое взаимно-однозначно отображается на себя. Тогда снова приходим к неравенству (5.5). Если предполагается, что энтропия не уменьшается [31], то

$$\mathrm{Tr}[(\rho')^2] \leq \mathrm{Tr}[\rho^2]. \tag{5.11}$$

Отсюда следует уравнения (5.6) и (5.10).

VI. ЧТО ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНЫМ

Результатом квантовой динамики является описание зависимости от времени средних значений для эрмитовых операторов, представляющих физические величины. Сюда включается зависимость от времени вероятностей, которые являются средними значениями проекционных операторов. Результат не зависит от выбора между представлениями Шредингера и Гейзенберга. Среднее значение <P> для эрмитова оператора P равно Tr [Pρ], где ρ – матрица плотности, представляющая состояние. В представлении Шредингера производная по времени от <P> равна

$$\frac{d}{dt}\langle P\rangle = Tr[P\frac{d\rho}{dt}]. \tag{6.1}$$

Линейность отображения матриц плотности означает, что для матрицы плотности ρ, представляющей смесь и описываемой уравнением (5.1), производная по времени равна

$$\frac{d\rho}{dt} = p\frac{d\rho_1}{dt} + (1-p)\frac{d\rho_2}{dt}, \tag{6.2}$$

так что для среднего значения

$$\begin{aligned}\frac{d\langle P\rangle}{dt} &= \frac{dTr[P\rho]}{dt} = Tr[P\frac{d\rho}{dt}]\\ &= pTr[P\frac{d\rho_1}{dt}] + (1-p)Tr[P\frac{d\rho_2}{dt}].\end{aligned} \tag{6.3}$$

Это означает, что производная по времени зависит от состояния линейно. Она не может быть произведением средних значений, как это соответствовало бы уравнениям движения (2.5) в нашем примере теории Weinberg'а. Производная по времени некоторого оператора может быть произведением операторов; уравнения движения в представлении Гейзенберга могут быть нелинейными. Но производная по времени оот среднего значения должна быть линейной функцией средних значений [1].

VII. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛИНЕЙНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ МАТРИЦ ПЛОТНОСТИ

Можем ли мы доказать, что изменение матрицы плотности линейно? Да, если мы предположим, что одна система может сосуществовать с другой без взаимодействия.

Идея о том, что квантовая динамика в наиболее общем случае описывается линейными отображениями матриц плотности была высказана [32, 33] в 1961 году. Теперь мы получили ее доказательство. Это и есть недавний этап [1]. Он представляет собой итог цепочки этапов, доказательство допущения, лежащего в основе доказательства Wigner'a-Bargmann'a. Сделанное нами базовое допущение обсуждается в следующем разделе, а здесь приводится основанное на нем доказательство.

Предположим, что рассматриваемая нами система S является одной из двух отдельных систем S и R. Рассмотрим более широкую систему, составленную из двух подсистем S и R. Мы предполагаем, что могут быть и другие подсистемы, это не имеет значения. Мы, далее, предполагаем, что динамика системы S не зависит от чего-либо вне S – ни от того, что происходит в R, ни от самих состояний R, ни от корреляций между состояниями S и R. Мы предполагаем, таким образом, что хотя S может быть описана как часть более широкой системы, составленной из S и R, но динамика S не зависит от ее взаимоотношений с остальными частями этой более широкой системы.

Допустим, что состояние общей системы, составленной из S и R, представлено матрицей плотности

$$\overline{\Pi} = p\rho_1|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-p)\rho_2|\beta\rangle\langle\beta| \tag{7.1}$$

где |α> и |β> - ортонормальные векторы для R, которые не зависят от времени и, как и выше, ρ_1 и ρ_2 – матрицы плотности для S, а p –число между 0 и 1. Редуцированная матрица плотности $\mathrm{Tr}_R\overline{\Pi}$, которая является матрицей плотности ρ для S, описывается уравнением (5.1). Вероятность <P> для состояния, представленного проекцией оператора P для S, дается суммой соответствующих вероятностей

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \mathrm{Tr}_{SR}[P\overline{\Pi}] = \mathrm{Tr}_{SR}[P|\alpha\rangle\langle\alpha|\overline{\Pi}] + \mathrm{Tr}_{SR}[P|\beta\rangle\langle\beta|\overline{\Pi}] \\ &= \langle P|\alpha\rangle\langle\alpha|\rangle + \langle P|\beta\rangle\langle\beta|\rangle = p\mathrm{Tr}_S[P\rho_1] + (1-p)\mathrm{Tr}_S[P\rho_2].\end{aligned} \tag{7.2}$$

Предположим, что измерение выполнено над R и позволяет отличить состояния |α> и |β>. Тогда с вероятностью p будет получен результат равен |α>, а с вероятностью (1 − p) – результат |β>. Если результатом является |α>, то вероятность для состояния P есть $\mathrm{Tr}_S[P\rho_1]$, а если |β>, то вероятность для P есть $\mathrm{Tr}_S[P\rho_2]$. Это может быть проверено экспериментально путем повторения процесса изготовления состояния $\overline{\Pi}$, измерения с целью выявит состояния R и тестирования различных состояний для S. Матрицы плотности ρ_1 и ρ_2 физически описывают различные возможности. Времена событий могут быть изменены насколько это потребуется, чтобы измерение над R происходило заведомо раньше. Зависимость времени от ρ_1 и ρ_2 будет учтена при изменениях результатов.

Производная по времени для вероятности состояния P будет равна $\mathrm{Tr}_S[Pd\rho_1/dt]$ или $\mathrm{Tr}_S[Pd\rho_2/dt]$ в зависимости от результтата измерения над R. В целом для вероятностей обоих рассмотренных результатов, производная по времени для вероятности состояния P равна

$$p\,Trs_S[P\frac{d\rho_1}{dt}] + (1-p)Trs_S[P\frac{d\rho_2}{dt}] = Trs_S[P(p\frac{d\rho_1}{dt} + (1-p)\frac{d\rho_2}{dt})]. \tag{7.3}$$

Вероятность <P> для состояния P равна также

$$\langle P\rangle = \mathrm{Tr}_{SR}[P\overline{\Pi}] = \mathrm{Tr}_S[P\mathrm{Tr}_R\overline{\Pi}] = \mathrm{Tr}_S[P\rho]. \tag{7.4}$$

Ее производная по времени есть $\mathrm{Tr}_S[Pd\rho/dt]$. Это выполняется всегда и всегда может быть использовано. Например, предположим, что состояние составленной из S и R системы представлено матрицей плотности

$$\Pi = p\rho|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-p)\rho|\beta\rangle\langle\beta| = \rho[p|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1-p)|\beta\rangle\langle\beta|]. \tag{7.5}$$

Динамика для S должна быть одинаковой для Π и для $\overline{\Pi}$.

Производная по времени от вероятности для состояния P всегда равна $\mathrm{Tr}_S[Pd\rho/dt]$. Имеются ситуации, когда необходимо использовать описание с помощью уравнения (7.3) для адаптации наблюдений событий в более широкой системе. Динамика в S не может зависеть от ситуации для S по отношению к более широкой системе. Следовательно

$$Tr_S[P\frac{d\rho}{dt}] = Tr_S[P(p\frac{d\rho_1}{dt} + (1-p)\frac{d\rho_2}{dt})]. \tag{7.6}$$

Из этого равенства для различных проекционных операторов P мы заключаем, что

$$\frac{d\rho}{dt} = p\frac{d\rho_1}{dt} + (1-p)\frac{d\rho_2}{dt}. \tag{7.7}$$

VIII. ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА БАЗОВОГО ДОПУЩЕНИЯ

В качестве базового допущения нам необходимо принять то и только то, что рассматриваемая система может сосуществовать с другой системой без взаимодействия, что рассматриваемая динамика может быть не зависящей от чего бы то ни было еще во Вселенной, что рассматриваемая система может быть описана как часть более широкой системы, не взаимодействующей с остальными ее частями.

Это подобно явному предположению, которое мы делаем ежедневно, когда концентрируем внимание на какой-либо части Вселенной и считаем, что остальное не оказывает на нее никакого влияния. Мы исходим из этого всегда, без такого предположения вообще невозможна никакая физика.

Вообще-то такой постулат сильнее, чем то допущение, которое мы сделали. Он состоит в том, что *все* вне рассматриваемой системы не оказывает на нее влияния. Мы же предположили только, что есть хоть *что-то* внешнее, что не оказывает на нее влияния. Граница действия общего постулата обусловлена частью внешней Вселенной, окружающей рассматриваемую систему, оказывающей наибольшее влияние. Граница действия же нашего предположения обусловлена частью внешней Вселенной, окружающей рассматриваемую систему, оказывающей наименьшее влияние.

Наше допущение близко по духу к идее, описанной в [34], но доказательство в разделе VII не использует квантовое запутывание (entanglement). Наше доказательство даже не основано на квантовой механике; оно с успехом может быть выполнено в рамках классической механики. Используемые корреляции являются чисто классическими. Суть та же, что и в классической механике; только язык отличен.

Можем ли мы доказать, что квантовая динамика должна быть линейной? Да, если мы предположим, что одна система может сосуществовать с другой без взаимодействия.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Я благодарен Войцеху Зуреку (Wojciech Zurek) за гипотезу, которая вернула меня к этой проблеме с открытыми глазами.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] T. F. Jordan, Phys. Rev. A **73**, 022101 (2006).

[2] E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic, New York, 1959), appendix to Chapter 20 and first section of Chapter 26.

[3] V. Bargmann, J. Math. Phys. **5**, 862 (1964).

[4] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, Ann. Phys. (N. Y.) **100**, 62 (1976).

[5] A. Shimony, Phys. Rev. A **20**, 394 (1979).

[6] C. Shull, D. K. Atwood, J. Arthur, and M. A. Horne, Phys. Rev. Lett. **44**, 765 (1980).

[7] R. Gahler, A. G. Klein, and A. Zeilinger, Phys. Rev. A **23**, 1611 (1981).

[8] S. Weinberg, Ann. Phys. (N.Y.) **194**, 336 (1989).

[9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **62**, 485 (1989).

[10] J. J. Bollinger, D. J. Heinzen, W. M. Itano, S. L. Gilbert, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **63**, 1031 (1989).

[11] T. E. Chupp and R. J. Hoare, Phys. Rev. Lett. **64**, 2261 (1990).

[12] R. L. Walsworth, I. F. Silvera, E. M. Mattison, and R. F. C. Vessot, Phys. Rev. Lett. **64**, 2599 (1990).

[13] P. K. Majumder, B. J. Venema, S. K. Lamoreaux, B. R. Heckel, and E. N. Fortson, Phys. Rev. Lett. **65**, 2931 (1990).

[14] N. Gisin, Helv. Phys, Acta **62**, 363 (1989).

[15] N. Gisin, Phys. Lett A **143**, 1 (1990).

[16] C. Simon, V. Buzek, and N. Gisin, Phys. Rev. Lett. **87**, 170405 (2001).

[17] T. F. Jordan, M. A. Pinsky, and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **3**, 848 (1962).

[18] R. V. Kadison, Topology **3 Suppl. 2**, 177 (1965).

[19] W. Hunziker, Helv. Phys. Acta **45**, 233 (1972).

[20] B. Simon, in *Studies in Mathematical Physics: Essays in Honor of Valentine Bargmann*, edited by E. H. Leib, B. Simon, and A. S. Wightman (Princeton U.P., Princeton, NJ, 1976), pp. 327–349.

[21] T. F. Jordan, Phys. Lett. A **151**, 215 (1990).

[22] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **66**, 397 (1991).

[23] T. F. Jordan, Ann. Phys. (N.Y.) **225**, 83 (1993).

[24] T. F. Jordan, Phys. Rev. A **49**, 5086 (1994).

[25] T. F. Jordan, *Linear Operators for Quantum Mechanics* (Wiley, Dover, 1969, 2007

[26] D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1951).

[27] A. Einsten, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[28] T. F. Jordan and Z. E. Sariyianni, Phys. Lett. A **263**, 263 (1999).

[29] M. Czachor and H.-D. Doebner, Phys. Lett. A **301**, 139 (2002).

[30] A. Kent, Phys. Rev. A **72**, 012108 (2005).

[31] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **63**, 1114 (1989).

[32] E. C. G. Sudarshan, P. M. Mathews, and J. Rau, Phys. Rev. **121**, 920 (1961).

[33] T. F. Jordan and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **2**, 772 (1961).

[34] W. H. Zurek, Phys. Rev. A. **71**, 052105 (2005).