ФАКТОР СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ В МОДЕЛЯХ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ДИНАМИКИ.

Ершков С.В.

В настоящей работе предложена универсальная эволюционная модель динамики изменения численности популяций (*в т.ч. численности народонаселения Земли*), насыщения экономических и экологических ниш в отраслевой экономике, биологии и популяционной динамике, исчерпания запасов стратегических ресурсов и ёмкости динамично развивающихся рынков.

Как известно, все описанные выше процессы до сих пор моделировались при помощи т.н. ***логистического уравнения***, которое, фактически, определяло *линейную* зависимость между автомодельной (самоподобной) скоростью развития того или иного процесса, и остаточной ёмкостью незаполненной ниши (*своеобразной "разностью потенциалов"*):

$$\left(\frac{dN/dt}{N}\right) = b\cdot\left(K - N\right),$$

- здесь:

t – параметрическое время, N – исследуемая количественная характеристика заполнения той или иной ниши (ресурс), $N = N(t)$; b – коэффициент воспроизводства исследуемого ресурса, в общем случае $b = b(t)$; K – ёмкость ниши, заполняемой исследуемым ресурсом, или, другими словами, максимальная численность (финальное количество) ресурса при существующих ограничениях на развитие динамики процесса, в общем случае $K = K(t)$.

В данной работе предлагается учитывать при моделировании подобных процессов такой фактор как *сопротивление среды*:

$$R_{активное} + R_{реактивное},$$

- где:

$R_{активное}$ - активное (постоянное) сопротивление среды, а именно: сопротивление среды насыщению посторонними элементами (*либо исчерпанию собственных элементов*), не зависящее от их количества; в качестве примера можно привести, в случае исследования динамики численности народонаселения Земли, постоянно происходящие (случающиеся) катастрофы техногенного, природного или иного характера, уносящие сотни тысяч жизней каждый год;

$R_{реактивное}$ - реактивное сопротивление среды, а именно: реакция среды на всё возрастающее количество чужеродных элементов $N(t)$ (*либо исчерпание собственных*); в общем случае $R_{реактивное} = R_{реактивное}(N)$.

При этом, приняв во внимание что уровень заполнения "ниши" определяется величиной (демографического) давления $P(t) = N(t)/K(t)$, а также известный принцип Маха "действие подобно противодействию", без ограничения общности можно считать, что $R_{реактивное}(N) \sim N(t)$, или, другими словами, функция сопротивления среды определяется следующим образом:

$$R(t) \sim R_0(t) + (N(t)/K(t)) .$$

Теперь мы можем сформулировать новый универсальный принцип, определяющий динамику развития многих процессов, описанных выше:

Автомодельная (самоподобная) скорость развития того или иного процесса *прямо пропорциональна* остаточной ёмкости незаполненной ниши и *обратно пропорциональна* сопротивлению среды.

Кроме того, мы можем в явном виде выписать новое эволюционное уравнение, определяющее динамику развития подобных процессов:

$$\left(\frac{dN/dt}{N}\right) = b\cdot\left(\frac{1-(N/K)}{R+(N/K)}\right),$$

- здесь приняты те же обозначения, что и ранее; кроме того, здесь R – функция постоянного уровня сопротивления среды, заполняемой исследуемым ресурсом, в общем случае $R = R(t)$.

Перепишем последнее уравнение в несколько измененной форме:

$$(K\cdot R + N)\cdot N' = b\cdot(K\cdot N - N^2) \qquad (1.1)$$

Уравнение ***(1.1)*** является классическим случаем уравнения Абеля 2-ого рода [1], своего рода обобщением уравнений типа Риккати. Это означает, что искомое решение существует непрерывным образом только в определенном диапазоне значений t, или, другими словами, претерпевает разрыв при некотором $t = t_0$ (*аналогично случаям, рассмотренным в* [2-8]).

В работах [2-8] были детально исследованы основные эволюционные уравнения динамики и механики (в т.ч., квантовой механики) с точки зрения операционной автомодельности [4], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Квантово-механическое уравнение Шрёдингера,
- Система уравнений Эйлера вращения твёрдого тела,
- Уравнение транспорта тепла (уравнение диффузии).

Проведенное исследование позволило сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений): их решения подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати [1].

Далее, произведя в уравнении (***1.1***) замену: $N(t) + K\cdot R = 1/y(t)$, мы получим уравнение Абеля 1-ого рода:

$$y' = b\cdot\left\{ K^2\cdot R\cdot(1+R)\cdot y^3 - \left(K\cdot(1+2R) + \frac{(K\cdot R)'}{b} \right)\cdot y^2 + y \right\}, \qquad (1.2)$$

- которое, в предположении постоянства ёмкости ниши $K(t) = const = K$ и коэффициента воспроизводства исследуемого ресурса $b(t) = const = b$, а также неизменности уровня постоянного сопротивления среды $R(t) = const = R$, может быть легко разрешено (переменные разделяются):

$$y' = b\cdot\left\{ K^2\cdot R\cdot(1+R)\cdot y^3 - K\cdot(1+2R)\cdot y^2 + y \right\}.$$

Рассмотрим случай $R = 1/K$; кроме очевидного упрощения правых частей двух последних уравнений, этот случай интересен сам по себе: *уровень постоянного сопротивления среды обратно пропорционален ёмкости заполняемой ниши*. Итак, из последнего уравнения получаем:

$$y' = b\cdot\left\{\frac{1}{R}\cdot(1+R)\cdot y^3 - \frac{1}{R}\cdot(1+2R)\cdot y^2 + y\right\},$$

или, переписав несколько иначе:

$$y' = b\cdot[y-1]\cdot y\cdot\left(\frac{1+R}{R}\right)\cdot\left[y-\left(\frac{R}{R+1}\right)\right],$$

т.е.

$$\left(\frac{R}{1+R}\right)\cdot\int\frac{dy}{[y-1]\cdot y\cdot\left[y-\left(\frac{R}{R+1}\right)\right]} = b\cdot\int dt,$$

откуда получаем при помощи замены $\ln y = z$ и последующего интегрирования по частям:

$$z + R\cdot\ln(e^z-1) - (1+R)\cdot\ln\left(e^z - \frac{R}{1+R}\right) = b\cdot\Delta t,$$

т.е.

$$\ln y + R\cdot\ln(y-1) - (1+R)\cdot\ln\left(y-\frac{R}{1+R}\right) = b\cdot\Delta t,$$

отсюда следует:

$$\frac{y\cdot(y-1)^R}{\left(y-\frac{R}{1+R}\right)^{(1+R)}} = e^{b\cdot\Delta t},$$

или, поскольку $y(t) = 1/(N(t)+1)$:

$$\left[\frac{N(t)}{R\cdot N(t)-1}\right]^{(1+R)}\times\left(-\frac{1}{N(t)}\right) = \frac{e^{b\cdot\Delta t}}{(1+R)^{(1+R)}}$$

Переписав последнее выражение несколько иначе (***R = 1/K***)

$$\left[\frac{1}{K} - \frac{1}{N(t)}\right]^{\left(1+\frac{1}{K}\right)} \times \left(-N(t)\right) = \left(1 + \frac{1}{K}\right)^{\left(1+\frac{1}{K}\right)} \times e^{-b\cdot\Delta t}$$

- мы получим искомое выражение для функции ***N(t)***.

При этом, если ёмкость ниши ***K*** достаточна велика (*например, при исследовании численности народонаселения Земли* ***K ~ 18 млрд. чел.***), можно без ограничения общности считать что в последнем выражении ***(1 + 1/K) → 1;*** это означает что:

$$\left[-\frac{N(t)}{K} + 1\right] = e^{-b\cdot\Delta t} ,$$

- или:

$$N(t) = \left(1 - e^{-b\cdot\Delta t}\right)\cdot K .$$

Итак, мы получили достаточно простое выражение для описания изменения численности популяций (*в т.ч. численности народонаселения Земли*), насыщения экономических и экологических ниш в отраслевой экономике, биологии и популяционной динамике, исчерпания запасов стратегических ресурсов (*нефти, углеводородного топлива, урана и т.д.*) и ёмкости динамично равзвивающихся рынков, с учётом сделанных выше предположений.

В заключение приведём ещё один интересный случай интегрируемости уравнения (***1.2***): при условии ***R = 1/K = const*** переменные разделяются также и при ***b (t) ≠ const;*** в этом случае из уравнения (***1.2***) мы получаем, если ёмкость ниши ***K*** достаточна велика:

$$N(t) = \left(1 - e^{-\int b(t)dt}\right)\cdot K .$$

Список использованной литературы:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.
2. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
3. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.
4. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm
5. Ершков С.В. Параметрическая коррекция представлений о характере эволюционных преобразований // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_parametricheskaya.pdf
6. Ершков С.В. Операционная автомодельность: Уравнение Шрёдингера // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_uravnenie.pdf
7. Ершков С.В. Концепция операционной автомодельности в приложении к модели твёрдого тела // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_kontseptsia.pdf
8. Ершков С.В. Операционная автомодельность: Уравнение теплопроводности // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_operatsionnaya.pdf