РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СЫПУЧИХ СРЕД

ПРИ СВОБОДНОМ СКОЛЬЖЕНИИ

Ершков С.В.

В настоящей работе приводится исследование динамики скольжения слоя сыпучих (гранулированных) материалов, на примере лавинообразного соскальзывания верхнего слоя песка по поверхности песчаного массива (*без хаотического перемешивания*), в поле силы тяжести.

В конце работы полученные результаты применяются к исследованию процесса схода лавины с поверхности горного склона. На основании предложенной математической модели приводится оценка Времени схода лавины, её максимальной скорости движения; полученные результаты вполне согласуются с экпериментальными данными.

Исследование позволяет присоединить данный раздел механики к разделам, исследованным ранее с точки зрения операционной автомодельности – нового подхода [1-2] к исследованию Временных (эволюционных) процессов [3-8], предложенного автором.

Поскольку концепция операционной автомодельности [1] подразумевает независимость от масштабов в исследуемой модели, в [2] предложена следующяя схема условного разделения (представлений):

I. Микро-Мир:

Времени не существует, его роль (фактически) играет волновая функция состояния Ψ, полностью описывающая квантово-механическое состояние объекта исследования в заданной точке пространства. Изменение состояния отдельно взятой частицы описывается уравнением Шрёдингера. Факт приводимости уравнения Шрёдингера к уравнениям типа Риккати установлен в варианте операционной автомодельности в работе [3].

II. Мезо-Мир:

Время многолико, схема его моделирования зависит от рассматриваемого процесса, параметризуется через энтропию и/или через динамические инварианты протекающего процесса.

При этом факт приводимости к уравнениям типа Риккати основных уравнений механики, а именно:

- *уравнений динамики жидкости и газа (уравнений Навье-Стокса)* [4],
- *уравнений электро-магнитной динамики Максвелла* [5],
- *уравнений Эйлера вращения твёрдого тела* [6],

- а также *уравнений транспорта тепла* [7] и *популяционной динамики* [8] был установлен в варианте операционной автомодельности, без ограничений общности.

Учитывая приведенные выше примеры, нам остаётся показать факт приводимости к уравнениям типа Риккати основных уравнений нелинейной динамики – *реологии* – твёрдых тел переменной массы (*гранулированных, сыпучих материалов*), что и было сделано в данной работе.

III. Макро-Мир:

Современные представления об эволюции Вселенной восходят к простейшей космологической модели Эйнштейна-Фридмана, оперирующей с трехмерным неэвклидовым пространством переменного во времени радиуса кривизны ***R(t)***. Указанное пространство предполагается в этой модели однородным и изотропным, а время выступает в качестве формального параметра. Факт приводимости уравнений Эйнштейна-Фридмана к уравнениям типа Риккати установлен в варианте операционной автомодельности в работе [2].

Итак, в работах [1-8] были детально исследованы основные эволюционные уравнения динамики, механики (*в т.ч., квантовой механики*) и популяционной динамики с точки зрения операционной автомодельности [1-2], а именно:

- Система уравнений Эйнштейна-Фридмана, описывающая простейшую космологическую модель эволюции Вселенной,
- Система полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа,
- Система уравнений электро-магнитной динамики Максвелла,
- Волновое уравнение (на примере квантово-механического уравнения Шрёдингера),
- Система уравнений Эйлера вращения твёрдого тела,
- Уравнение транспорта тепла (уравнение диффузии),
- Модифицированное логистическое уравнение (с учётом фактора сопротивления среды).

Проведенное исследование позволило сделать вывод о топологическом подобии рассмотренных эволюционных моделей (уравнений): их решения подобны друг другу и решениям уравнений типа Риккати [9].

Учитывая приведенную выше схему условного разбиения эволюционных процессов на классы (*по масштабам области их протекания*), рассмотрим ниже эволюционную модель реологии гранулированных, сыпучих материалов – для того чтобы убедиться в **глобальном топологическом подобии** моделей эволюционных процессов в различных областях механики (*в т.ч., квантовой механики*), динамики (*в т.ч., элктро-магнитной динамики*), физики твёрдых тел, космологии и популяционной динамики (*роста численности популяций в биологии и математической социологии*).

Рассмотрим с качественной точки зрения кинематику процесса *приведения в движение* из состояния покоя, *собственно свободного движения* в поле силы тяжести, *и последующей остановки* (*торможения*) слоя лавинообразной массы сыпучих материалов; она состоит из трёх основных этапов:

1. Преодолевается необходимый барьер, т.н. ***предел текучести*** (*для неподвижно лежащего массива сыпучих материалов этот параметр определяется углом наклона* α *поверхности массива по отношению к горизонтальной плоскости*), и верхний, очень тонкий слой песка начинает “течь”, или - ссыпаться вниз по склону. Тем самым реализуется начальный этап пластической деформации: причина начала движения, а именно - касательное напряжение, превысевшее предел текучести, перестает действовать, но деформация остаётся.

При этом зависимость предела текучести σ от среднего размера зерна (*песчинки*) d может быть определена при помощи следующей полуэмпирической формулы:

$$\sigma = \sigma_0 + k \cdot d^{\eta} \qquad (1.1)$$

- где $1/2 \le \eta \le 1$, коэффициент k является положительной величиной, а формула (*1.1*) в целом предсказывает повышение предела текучести (*угла предельного наклона песчаной горки* α) с увеличением размера зерна d. Для песка очень мелкой фракции (*например, в небольших песочных часах* d*: 1 мкм ÷ 3 мкм*) предельный угол наклона равен примерно 50°. Для не очень крупного морского гравия (d*: 100 мкм ÷ 2,5 мм*) этот показатель составляет примерно 53÷54°.

2. Далее вступает в силу этап вязкой деформации, и для описания последующей динамики скольжения этого слоя песка мы можем воспользоваться законом вязкого трения Ньютона:

$$\frac{d}{dt}\Delta = \left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \sigma \qquad (1.2)$$

- где σ - касательное напряжение в движущемся слое, Δ - деформация, возникающая в результате воздействия σ; кроме того, здесь μ - динамическая вязкость (*коэффициент пропорциональности между напряжением и скоростью вызванной этим напряжением деформации*).

3. На финальном этапе - этапе торможения – необходимо учитывать что пластическая деформация присутствует на всём пути следования соскальзывающего слоя песка (*в дополнение к вязкой деформации*) и этап пластической деформации начинается с самого начала движения соскальзывающего слоя (*на старте*), и действует вплоть до полной его остановки. Таким образом, для того чтобы произошла остановка “катящейся лавины”, должна совершиться определённая работа (*здесь* Δ_{finish} – *пластическая деформация в движущемся слое при его торможении;* ρ *- плотность песка,* $\rho \cdot d$ – *удельная (на ед. площади поверхности) масса движущегося песчаного слоя толщиной* d*;* g – *ускорение свободного падения;* α – *угол наклона песчаной горки*):

$$\int_0^t \sigma(t)\, d(\Delta_{finish}+\Delta) = \rho\cdot d\cdot g\cdot h - \left[\ \rho\cdot d\cdot g\cdot \{h-\cos\alpha\cdot\int_0^t (\Delta'_{finish}(t)+\Delta'(t))dt\} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\rho\cdot d}{2}\right)\cdot\left(\Delta'_{finish}(t)+\Delta'(t)\right)^2\ \right].$$

На этом этапе движения подразумевается что напряжение, совершающее работу по остановке лавинообразной массы на расстоянии $d\ (\Delta_{finish} + \Delta)$, равно касательному вязкому напряжению в движущемся слое σ (***1.2***) на протяжении всего этапа торможения. Также подразумевается что кинетическая энергия движущегося слоя, накопленная на этапе свободного скольжения (***1.2***), полностью переходит в теплоту посредством работы (*удельной*) силы σ при остановке (*торможении*) скользящего слоя песка.

Дифференцируя обе части последнего выражения по t, получим

$$\sigma(t) = \rho\cdot d\cdot g\cdot\left(\cos\alpha - \left(\frac{\Delta''_{finish} + \Delta''}{g}\right)\right), \qquad (1.3)$$

$$\Delta''_{finish} + \Delta'' = g\cdot\left(\cos\alpha - \left(\frac{\sigma(t)}{\rho\cdot d\cdot g}\right)\right) \qquad (1.4)$$

Выражение (***1.3***) определяет *линейную* зависимость составляющих тензора касательного напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ от тензора *ускорений* деформаций $\Delta_{finish} + \Delta$ в движущемся слое при его торможении. Это – уравнение вынужденных колебаний, разновидность уравнений типа Риккати с постоянными коэффициентами [9].

Кроме того, из соотношений (***1.2***) и (***1.4***) мы можем сделать следующий вывод:

$$\Delta''_{finish} + \Delta'' = g \cdot \cos\alpha - \left(\frac{\mu}{\rho \cdot d}\right) \cdot \Delta' \qquad (1.5)$$

При этом, до момента полной остановки движущегося слоя, должно с очевидностью выполняться следующее условие:

$$\sigma(t) > \sigma_0 + k \cdot d^{\,\eta}$$

Это означает, учитывая соотношение (***1.1***), что

$$\ddot{\varepsilon} = \left(\Delta''_{finish} + \Delta''\right) < g \cdot \cos\alpha - \left(\frac{\sigma_0}{\rho \cdot d}\right) - \left(\frac{k \cdot d^{\,\eta - 1}}{\rho}\right) \qquad (1.6)$$

- где $1/2 \le \eta \le 1$, коэффициент $\boldsymbol{k}$ является положительной величиной, а формула (***1.6***) в целом предсказывает ограничение составляющих тензора ускорений и скоростей деформаций в движущемся слое:

$$\dot{\varepsilon} = \left(\Delta'_{finish} + \Delta'\right) < \left\{ g \cdot \cos\alpha - \left(\frac{\sigma_0}{\rho \cdot d}\right) - \left(\frac{k \cdot d^{\,\eta - 1}}{\rho}\right) \right\} \cdot t + C_0$$

$$\varepsilon = \left(\Delta_{finish} + \Delta\right) < \left\{ g \cdot \cos\alpha - \left(\frac{\sigma_0}{\rho \cdot d}\right) - \left(\frac{k \cdot d^{\,\eta - 1}}{\rho}\right) \right\} \cdot \left(\frac{t^2}{2}\right) + C_1$$

$$C_0 = C_1 = 0 \ .$$

Например, для соскальзывающей снежной лавины - *по поверхности горного массива, покрытого снегом* - может быть получена следующая оценка времени, требующегося для полной остановки лавины, и её максимальной скорости движения (*в данном случае,* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *- длина пробега лавины по поверхности горного массива;* $\boldsymbol{h}$ *- высота горного массива;* $\boldsymbol{\sigma_0 = \rho \cdot H \cdot g \cdot cos\ \alpha}$, *где* $\boldsymbol{\rho}$ *- плотность снега,* $\boldsymbol{H}$ *– толщина верхнего слоя снега,* $\boldsymbol{H \approx 0{,}5 \div 0{,}7}$ ***м;*** $\boldsymbol{d = H + d_0}$ *,* $\boldsymbol{d_0}$ *- средний размер кристаллов подстилающего (нижнего) слоя снега,* $\boldsymbol{d_0 \approx 9}$ ***мм*** $\boldsymbol{= 9*10^{-3}}$ ***м;*** $\boldsymbol{k = 0}$):

$$t \;>\; \frac{\sqrt{2h / \cos\alpha}}{\left\{ g \cdot \cos\alpha \;-\; \left(\dfrac{\sigma_0}{\rho \cdot d} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}} \;=\; \sqrt{2h / g} \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} \right) \cdot \left\{ 1 \;+\; \left(\frac{H}{d_0} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\dot{\varepsilon} \;<\; \left\{ g \cdot \cos\alpha \;-\; \left(\frac{\rho \cdot H \cdot g \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot (H + d_0)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2h / \cos\alpha} \;=\; \left(\frac{d_0}{H + d_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2h \cdot g} ,$$

- при этом нужно учитывать что скорость снежной лавины всё время непрерывно нарастает (*линейно, в соответствии с* ***(1.6)***), от самого старта и вплоть до полной остановки.

Возьмём следующие параметры:

$$\boldsymbol{\alpha \approx 20^\circ (\cos\alpha = 0{,}9397),\ h \approx 1000\ м,\ g = 10\ м/с^2,\ H \approx 0{,}5\ м,\ d_0 \approx 9\ мм .}$$

Тогда получим:

$$t \;>\; \left(\frac{\sqrt{2000 / 10}}{0{,}9397} \right) \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{0{,}5}{0{,}009} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{0{,}09397} \right) \cdot \sqrt{101} \;\approx 113{,}18\ сек \approx 2\ мин,$$

$$\dot{\varepsilon} \;<\; \left(\frac{0{,}009}{0{,}509} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2000 \cdot 10} \;=\; 0{,}0995 \cdot 100 \cdot \sqrt{2} \;=\; 18{,}8\ м / сек.$$

Итак, мы получили следующий результат: скорость схода снежной лавины всё время непрерывно нарастает - *линейно, в соответствии с* (***1.6***) – но, при этом, её *максимальная* скорость составляет (*при высоте склона* ***1000 м***) ***~ 18,8 м/сек = 67,7 км/час***. При высоте склона ***2000 м*** эта цифра составит ~ ***95,7 км/час***. При этом время схода лавины с высоты ***1000 метров*** не превышает ***2 мин***.

В приведённых выше расчётах не учитывался момент “скачков” лавины (*фрагменты “свободного полёта”, когда лавина не испытывает сопротивления движению, и её скорость значительно возрастает*).

Список использованной литературы:

1. Ершков С.В. Топологические аспекты динамического подобия в моделировании Времени // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_topologich/yershkov_topologich.htm
2. Ершков С.В. Параметрическая коррекция представлений о характере эволюционных преобразований // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_parametricheskaya.pdf
3. Ершков С.В. Уравнение Шрёдингера // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/ershkov_shredinger.pdf
4. Ершков С. В., Щенников В. В. Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 7. С. 1117 – 1124.
5. Быркин А.П., Ершков С.В., Щенников В.В. Конически автомодельные решения уравнений Максвелла с кручением электро-магнитного поля // Материалы 3-его совещания по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. М.: Институт высоких температур РАН. Апрель 2001. С.377–380.

6. Ершков С.В. Концепция операционной автомодельности в приложении к модели твёрдого тела // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_kontseptsia.pdf

7. Ершков С.В. Операционная автомодельность: уравнение теплопроводности // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_operatsionnaya.pdf

8. Ершков С.В. Фактор сопротивления среды в моделях эволюционной динамики // Опубликовано на сайте Института исследований природы времени: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/yershkov_faktor.pdf

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: Наука. 1971.